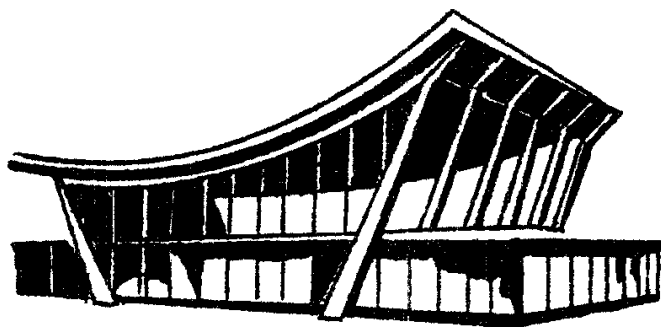


**Л.Н.Шутенко
Н.А.Засядько**



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Краткий курс

Разделы 3, 4

Харьков – ХНАГХ – 2005

Министерство образования и науки Украины
Харьковская национальная академия городского хозяйства

Л.Н.Шутенко, Н.А.Засядько

Строительная механика

Краткий курс

Разделы 3, 4

Устойчивость и динамика стержневых систем

(для студентов строительных специальностей)

Харьков – ХНАГХ – 2005

Шутенко Л.Н., Засядько Н.А. Строительная механика: Краткий курс/ Разделы 3, 4. Устойчивость и динамика стержневых систем (для студентов строительных специальностей). – Харьков: ХНАГХ, 2005. – 116 с.

Рецензенты: проф., д.т.н. Г.А.Молодченко,
доц., к.т.н. А.И.Рубаненко

В пособии изложены методы расчета стержневых систем на устойчивость и на динамические воздействия. Приведены задания на расчетно-графические работы и примеры их выполнения.

Предназначено для студентов строительных специальностей и филиалов академии.

Рекомендовано кафедрой теоретической и строительной механики,
протокол № 11 от 24.06.05 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 3. Устойчивость стержневых систем	6
1. Основные понятия.....	6
1.1. Определения	6
1.2. Степени свободы.....	9
Вопросы для самопроверки.....	9
2. Методы расчета на устойчивость.....	10
2.1. Динамический метод.....	10
2.2. Энергетический метод.....	10
2.3. Статический метод.....	12
Вопросы для самопроверки	15
3. Устойчивость прямого сжатого стержня.....	16
3.1. Устойчивость прямого сжатого стержня с шарнирным закреплением концов. Формула Эйлера.....	16
3.2. Критическая сила для прямого сжатого стержня постоянной жесткости при различных закреплениях его концов.....	18
3.3. Критические напряжения. Устойчивость за пределом упругости.....	19
3.4. Расчет сжатых стержней на прочность с учетом устойчивости.....	20
3.5. Метод начальных параметров.....	21
3.6. Дифференциальное уравнение четвертого порядка.....	23
Вопросы для самопроверки	24
4. Устойчивость рам.....	25
4.1. Основные положения.....	25
4.2. Расчет рам на устойчивость методом перемещений.....	26
4.3. Изгибающие моменты и реакции в сжато-изогнутых стержнях основной системы метода перемещений.....	27
4.4. Понятие о расчете рам на устойчивость методом сил.....	44
4.5. Учет симметрии в расчетах рам на устойчивость.....	45
Вопросы для самопроверки	46
5. Приближенные методы расчета сжатых стержней на устойчивость.....	47
5.1. Метод Ритца-Тимошенко.....	47
5.2. Метод Бубнова-Галеркина.....	48
5.3. Метод конечных разностей.....	49
Вопросы для самопроверки	51

6. Устойчивость круговых арок и колец.....	52
6.1. Дифференциальное уравнение изгиба кривого бруса при потере устойчивости.....	52
6.2. Устойчивость двухшарнирной арки.....	54
6.3. Устойчивость бесшарнирной арки.....	55
6.4. Устойчивость трехшарнирной арки.....	57
6.5. Устойчивость круговых колец.....	58
Вопросы для самопроверки	59
 Раздел 4. Динамика стержневых систем.....	60
7. Основные понятия.....	60
7.1. Динамические воздействия.....	60
7.2. Силы, сопровождающие колебания.....	62
7.3. Методы динамики сооружений.....	63
7.4. Степени свободы динамической системы.....	63
Вопросы для самопроверки	65
 8. Свободные колебания систем с одной степенью свободы.	66
8.1. Дифференциальное уравнение движения.....	66
8.2. Свободные колебания без сопротивления.....	67
8.3. Свободные колебания с сопротивлением.....	70
Вопросы для самопроверки	72
 9. Свободные колебания систем с конечным числом степеней свободы.....	72
Вопросы для самопроверки	76
 10. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы.....	76
10.1. Уравнение движения. Частные случаи возмущающей нагрузки.....	76
10.2. Вынужденные колебания при действии периодической возмущающей нагрузки.....	79
10.3. Усилия от динамических воздействий. Динамический коэффициент.....	81
Вопросы для самопроверки	83
 11. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы.....	83
11.1. Колебания при действии гармонической нагрузки.....	83
11.2. Общий случай действия возмущающей нагрузки Разложение по формам свободных колебаний.....	86
11.3. Кинематическое возбуждение колебаний. Расчет на сейсмическое воздействие.....	88
Вопросы для самопроверки	89

<i>Приложение. Расчетно-графические работы.....</i>	90
Работа № 1. Расчет рамы на устойчивость методом перемещений.....	90
Работа № 2. Расчет рам на динамическую нагрузку.....	104
Список литературы.....	115

РАЗДЕЛ 3. Устойчивость стержневых систем

1. Основные понятия

1.1. Определения

Рассмотрим разные случаи положения шарика на криволинейной поверхности (рис. 1). Если из положения 1 на вогнутой поверхности шарик отклонить, то, совершив несколько колебаний, он вернется на прежнее место. Такое положение называется положением *устойчивого равновесия*. Если аналогично отклонить шарик из положения 2, то он скатится с выпуклой поверхности. Такое положение называется положением *неустойчивого равновесия*.

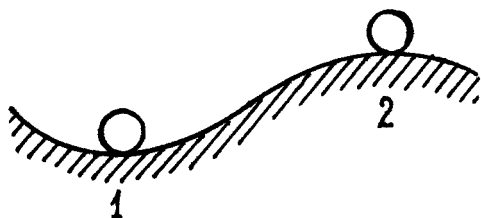


Рис. 1

Устойчивостью называют способность сооружения и его частей сохранять свое первоначальное положение и напряженно-деформированное состояние при действующих нагрузках.

Потеря устойчивости – это переход устойчивого состояния в неустойчивое.

В упрощенном виде определение устойчивого равновесия можно сформулировать следующим образом: состояние равновесия является *устойчивым*, если при достаточно малых возмущениях отклонения системы в течение всего времени движения остаются малыми, причем, уменьшая возмущения, можно сделать эти отклонения сколь угодно малыми.

Различают *устойчивость положения* и *устойчивость формы равновесия* в деформированном состоянии. Потеря устойчивости положения является результатом нарушения условий равновесия внешних сил (опрокидывание башенного крана, опрокидывание или сдвиг опорной стенки).

Потеря устойчивости формы равновесия в деформированном состоянии является следствием нарушения равновесия между внешними и внутренними силами. При этом происходит перераспределение внутренних сил и равновесие восстанавливается лишь в новом деформированном состоянии. Здесь мы будем рассматривать только устойчивость формы равновесия.

Рассмотрим поведение прямого стержня, сжатого силой F (рис. 2). При всех значениях этой силы, меньших некоторого, стержень будет сохранять исходную прямолинейную форму. Если при этом его слегка отклонить и отпустить, то он, совершив ряд колебаний относительно вертикального положения, возвратится к первоначальной прямолинейной форме. Таким образом, исходная прямолинейная форма стержня является устойчивой.

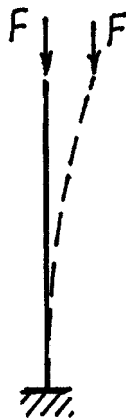


Рис. 2

С увеличением силы стержень выпрямляется все медленнее и, наконец, при определенной ее величине прямолинейная форма становится неустойчивой. Если теперь отклонить стержень на некоторую малую величину, то он не вернется в исходное состояние, а будет отклоняться все дальше или останется в отклоненном положении.

Теоретически исходная прямолинейная форма стержня возможна, но наряду с ней появляется новая – искривленная форма равновесия.

Наибольшая сила (нагрузка), до которой исходная форма равновесия является устойчивой, называется *критической силой (нагрузкой)*.

Кроме этого определения, являющегося определением снизу, можно дать определение сверху. В этом случае критической называется сила (нагрузка), до которой, кроме исходной, возможна еще хотя бы одна, отличная от исходной форма равновесия.

Переход стержня в новое положение связан с появлением бесконечно малых перемещений, поэтому новая форма равновесия называется *смежной*. Такая потеря устойчивости называется потерей устойчивости «в малом». В отличие от нее при потере устойчивости «в большом» переход системы в новое положение сопровождается достаточно большими перемещениями. Например, в системе на рис. 3 потеря устойчивости происходит прощелкиванием ее в нижнее (штриховая линия) положение. В этом курсе будем рассматривать только потерю устойчивости «в малом».

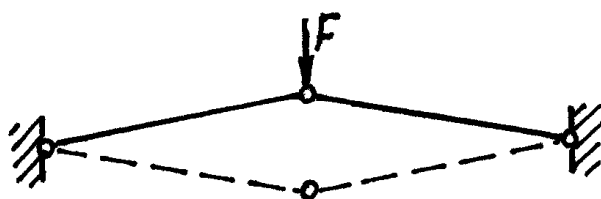


Рис. 3

Переход в смежное состояние сопровождается появлением новых, отличных от исходных видов деформаций. Например, в тонкой полосе (рис. 4,а), работающей на изгиб в вертикальной плоскости, при потере устойчивости появляются деформации кручения и изгиба не только в вертикальной, но и в горизонтальной плоскости. Круговое кольцо (рис. 4,б), находящееся под действием радиальной нагрузки, в исходном состоянии испытывает только осевое сжатие. При потере устойчивости кольцо изменяет свою форму и дополнительно к деформациям сжатия появляется изгиб.

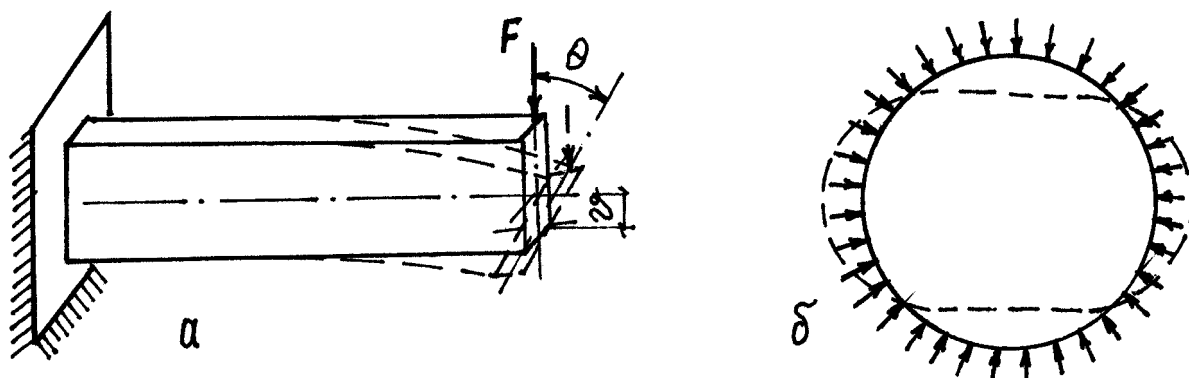


Рис. 4

Теоретически переход в смежное положение возможен лишь в том случае, если принудительно вывести систему из исходного состояния. Однако на практике это происходит самопроизвольно из-за наличия начальных несовершенств (неточность размеров и формы тела, неоднородность свойств материала, неточность приложения нагрузки). В настоящем курсе эти несовершенства предполагаются малыми, не влияющими на величину критической нагрузки.

Основной целью расчетов на устойчивость является определение критической нагрузки.

1.2. Степени свободы

Числом степеней свободы W в расчетах на устойчивость называется количество независимых геометрических параметров, определяющих положение системы при переходе в смежное состояние.

Упругий стержень на рис. 5,а при потере устойчивости изгибается так, что каждая его точка на расстоянии x получает перемещение y . Количество этих точек бесконечно, следовательно $W = \infty$. Наличие упругой опоры (рис. 5,б) дает точкам стержня дополнительные перемещения за счет ее осадки $y_{\text{полн}} = y + x \cdot \operatorname{tg} \theta$ и по-прежнему для него $W = \infty$. Таким образом, если система имеет в своем составе хотя бы один упругий стержень, число ее степеней свободы равно бесконечности.

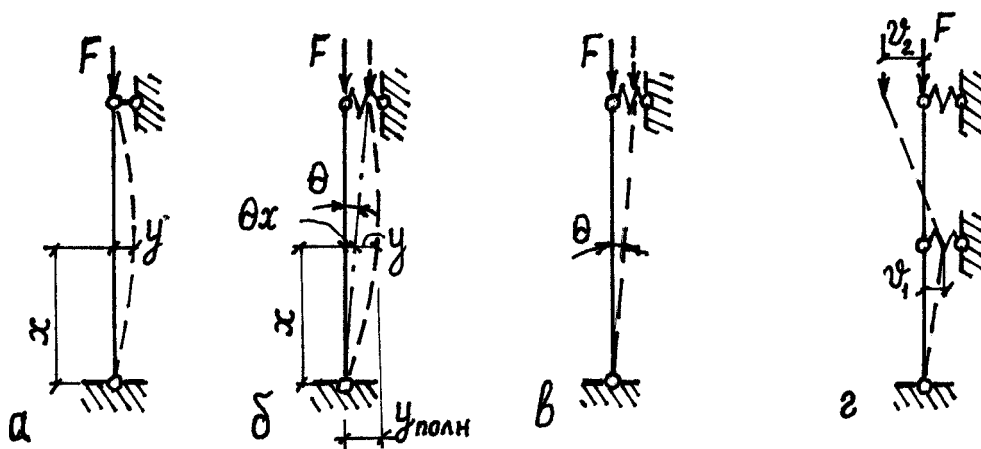


Рис. 5

Если перемещения от осадки упругих опор существенно больше перемещений, вызванных изгибом стержня, последними можно пренебречь. Тогда перемещения точек определяются лишь одним параметром θ (рис. 5,в) и $W = 1$.

Система абсолютно жестких стержней (рис. 5,г) с двумя упругими опорами имеет $W = 2$

Вопросы для самопроверки:

1. Назовите виды равновесия.
2. Что такое устойчивость?
3. Какие различают виды устойчивости?
4. Что такое смежная форма равновесия?
5. Что такое критическая сила?
6. Какая основная цель расчетов на устойчивость?
7. Что такое устойчивость «в малом» и «в большом»?
8. В чем различие в определении числа степеней свободы в расчетах на устойчивость и при проведении кинематического анализа геометрической неизменяемости?

2. Методы расчета на устойчивость

Различают три метода расчетов на устойчивость: динамический, энергетический и статический.

2.1. Динамический метод

Этот метод заключается в исследовании колебаний системы, выведенной из состояния равновесия и предоставленной далее самой себе. При нагрузке меньше критической система совершает затухающие колебания вокруг положения равновесия. Если нагрузка превышает критическую, колебания происходят с нарастающей амплитудой.

Этот метод может быть применен для расчета как консервативных, так и неконсервативных систем. Напомним, что в нашем курсе рассматриваются только консервативные системы, т.е. такие, в которых не происходит рассеивание энергии.

2.2. Энергетический метод

Этот метод основан на использовании энергетического критерия устойчивости, определяемого теоремами Лагранжа–Дирихле и Ляпунова. Приведем эти теоремы в упрощенной формулировке.

Теорема Лагранжа–Дирихле. Если в состоянии равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия минимальна по сравнению с энергией смежных состояний, то это состояние устойчиво.

Теорема Ляпунова. Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не минимальна по сравнению с энергией смежных состояний, то это положение неустойчиво.

Согласно этим теоремам для упругой системы, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, вариации полной потенциальной энергии должны удовлетворять условиям

$$\delta U_{\text{полн}} = 0, \delta^2 U_{\text{полн}} > 0.$$

Это условие можно упростить, если за начало отсчета потенциальной энергии принять ее величину в исходном состоянии. Тогда, считая начальные несовершенства малыми так, что $U_{o \text{ полн}} = 0$, получаем

$$\Delta U_{\text{полн}} = U_{\text{полн}} - U_{o \text{ полн}} = U_{\text{полн}}.$$

С учетом того, что полная потенциальная энергия выражается суммой работ внешних и внутренних U сил при переходе из исходного в смежное состояние, получаем энергетический критерий устойчивости в форме принципа возможных перемещений:

$$W + U = 0. \quad (1)$$

Обычно работы W и U вычисляют, отсчитывая не от исходного, а от смежного состояния. При этом работы W и U меняют свои знаки на противоположные и равенство (1) не нарушается.

Применение этого метода рассмотрим на примере абсолютно жесткого прямого сжатого стержня, упруго защепленного на одном конце (рис. 6,а). Пусть c – жесткость упругой заделки, т.е. реактивный момент, возникающий в ней при повороте опорного сечения на угол $\theta = 1$.

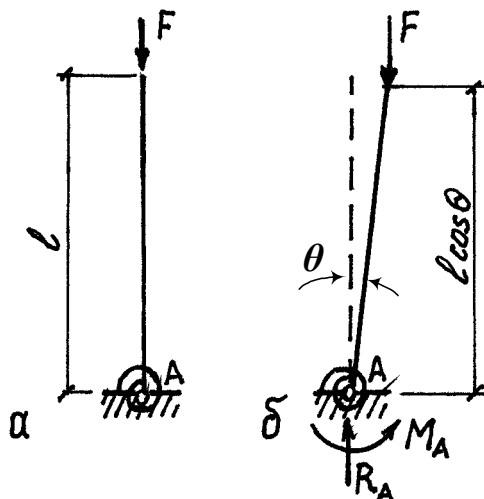


Рис. 6

Потеря устойчивости стержня происходит переходом его в смежное прямолинейное положение, определяемое углом поворота θ (рис. 6,б), т.е. система имеет 1 степень свободы. При переходе из смежного состояния в исходное сила F перемещается вверх, оставаясь постоянной. Ее работа отрицательна и равна $-Fl(1-\cos\theta)$. Реактивный момент в упругой заделке пропорционален углу поворота θ

$$M_A = c\theta$$

и выполняет работу, равную $\frac{1}{2} M_A \cdot \theta = \frac{c\theta^2}{2}$.

Таким образом, условие (1) в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\frac{c\theta^2}{2} - Fl(1-\cos\theta) = 0. \quad (2)$$

Учитывая, что старшая степень бесконечно малого угла θ в этом уравнении равна двум, раскладываем $\cos\theta$ в степенной ряд и удерживаем в этом разложении величины до второго порядка малости. Тогда

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

и (2) принимает вид

$$\frac{c\theta^2}{2} - Fl\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{c\theta^2}{2} - Fl\frac{\theta^2}{2} = 0.$$

Отсюда $F_{кр} = \frac{c}{l}$.

2.3. Статический метод

При потере устойчивости происходит разветвление (бифуркация) форм равновесия. Такое разветвление возможно не только при критической, но и при других значениях нагрузки, которые будем называть *бифуркационными*.

Исследования показали, что в консервативных системах критическим является минимальное из бифуркационных значений нагрузки.

Статический метод (метод Эйлера) состоит в отыскании бифуркационных значений нагрузки и последующем определении минимального из них. Для этого применяют условия равновесия к смежному состоянию системы.

Для иллюстрации метода рассмотрим систему двух абсолютно жестких стержней на упругих опорах (рис. 7,а), сжатых силой F .

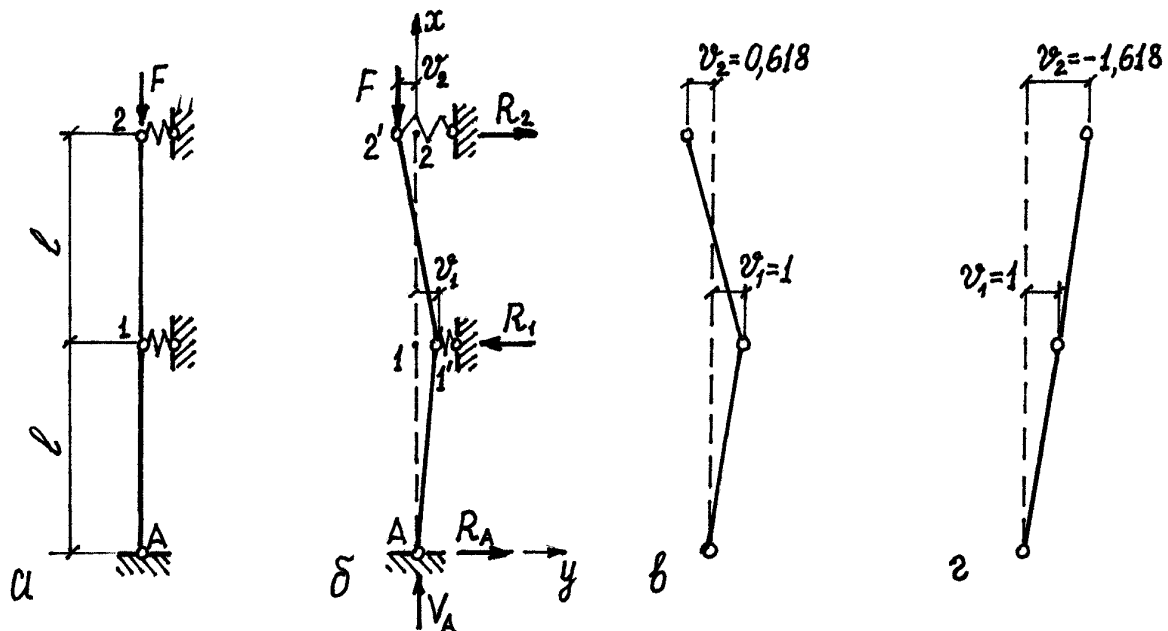


Рис. 7

При потере устойчивости упругие опоры деформируются и в них появляются реакции

$$R_1 = cv_1, R_2 = cv_2,$$

пропорциональные перемещениям v_1 и v_2 . Запишем условия равновесия системы в смежном состоянии:

$$\Sigma y = R_A - R_1 + R_2 = 0;$$

$$\Sigma x = V_A - F = 0;$$

$$\Sigma M_A = R_1 \cdot l - R_2 \cdot 2l + F \cdot v_2 = 0,$$

$$\Sigma_{\text{верхн.}} M_{1'} = -R_2 \cdot l + F \cdot (v_1 + v_2) = 0,$$

или

$$R_A - c v_1 + c v_2 = 0,$$

$$V_A - F = 0,$$

$$clv_1 - 2cl v_2 + F v_2 = 0,$$

$$-cl v_2 + F \cdot (v_1 + v_2) = 0.$$

Первые два уравнения по сравнению с третьим и четвертым вводят новые неизвестные – реакции R_A и V_A , поэтому их можно отбросить.

Сгруппируем слагаемые в оставшихся уравнениях по неизвестным v_1 и v_2 :

$$\begin{aligned} cl v_1 + (F - 2cl) \cdot v_2 &= 0, \\ F \cdot v_1 + (F - cl) \cdot v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как перемещения v_1 и v_2 не могут быть равны нулю, то нулю должен быть равен определитель, составленный из коэффициентов при них:

$$\begin{vmatrix} cl & (F - 2cl) \\ F & (F - cl) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение устойчивости

$$cl(F - cl) - F(F - 2cl) = 0$$

или

$$F^2 - 3clF + c^2l^2 = 0.$$

Решение уравнения дает два корня (две бифуркационные нагрузки), нумеруемые в порядке возрастания:

$$F_{1\sigma} = 0,382cl; \quad F_{2\sigma} = 2,618cl.$$

Как и в рассмотренном выше примере с одной степенью свободы, перемещения при потере устойчивости остаются неопределенными.

Подставляя $F_{1\delta}$ в первое уравнение (3), получаем соотношение перемещений

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{cl}{0,382cl - 2cl} = 0,618.$$

Его можно проконтролировать по второму уравнению (3):

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{0,382cl}{0,382cl - cl} = 0,618.$$

Принимая $v_1 = 1$, можно получить графически характер перемещений системы при $F = F_{1\delta}$ – первую форму потери устойчивости (рис. 7,в).

При подстановке в уравнение (3) F_2 соответственно получаем

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{cl}{2,618cl - 2cl} = -1,618$$

или

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{2,618cl}{2,618cl - cl} = -1,618.$$

Вторая форма потери устойчивости приведена на рис. 7,г.

Зависимость между нагрузкой и перемещениями v_2 при положительных смещениях v_1 представлена на рис. 8. При $F < F_{1\delta}$ единственной устойчивой формой равновесия является исходная прямолинейная форма. При $F_{1\delta} < F < F_{2\delta}$ устойчивой формой равновесия является смежная форма равновесия с $v_2 > 0$ (прямая 1 на рис. 8). Исходная форма равновесия при этом неустойчива и возможна лишь при закреплении стержня от перемещений. Вторая форма равновесия может быть получена при $F > F_{2\delta}$ (прямая 2 на рис. 8) принудительным смещением опорных точек 1 и 2. Строго говоря, эта форма равновесия является устойчивой так же, как продолжает являться устойчивой первая форма равновесия. Таким образом, при $F > F_{2\delta}$ возможны три формы равновесия: исходная – неустойчивая и первая и вторая – устойчивые.

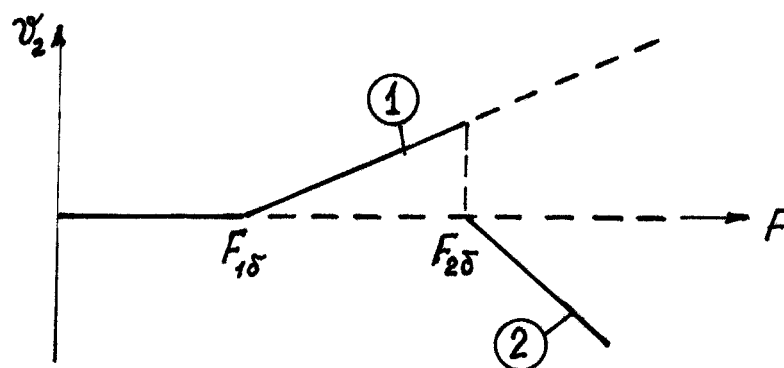


Рис. 8

Отметим, что количество форм потери устойчивости и, соответственно, бифуркационных сил определяется количеством степеней свободы и, в частности, при $W = \infty$ оно бесконечно.

На основании статического критерия устойчивости делаем вывод о том, что критической является меньшая из бифуркационных сил:

$$F_{кр} = \min(F_{1\delta}, F_{2\delta}) = F_{1\delta} = 0,382cl .$$

Вопросы для самопроверки:

1. В чем суть динамического метода расчета на устойчивость?
2. Что такое энергетический критерий устойчивости?
3. Как получают энергетический критерий устойчивости в форме принципа возможных перемещений?
4. Чем является жесткость упругой опоры?
5. В чем заключается метод Эйлера расчета на устойчивость?
6. Какая связь между числом степеней свободы и числом форм потери устойчивости?

3. Устойчивость прямого сжатого стержня

3.1. Устойчивость прямого сжатого стержня с шарнирным закреплением концов. Формула Эйлера

Исследуем устойчивость прямого сжатого стержня постоянной жесткости с шарнирно закрепленными концами (рис. 9, а).

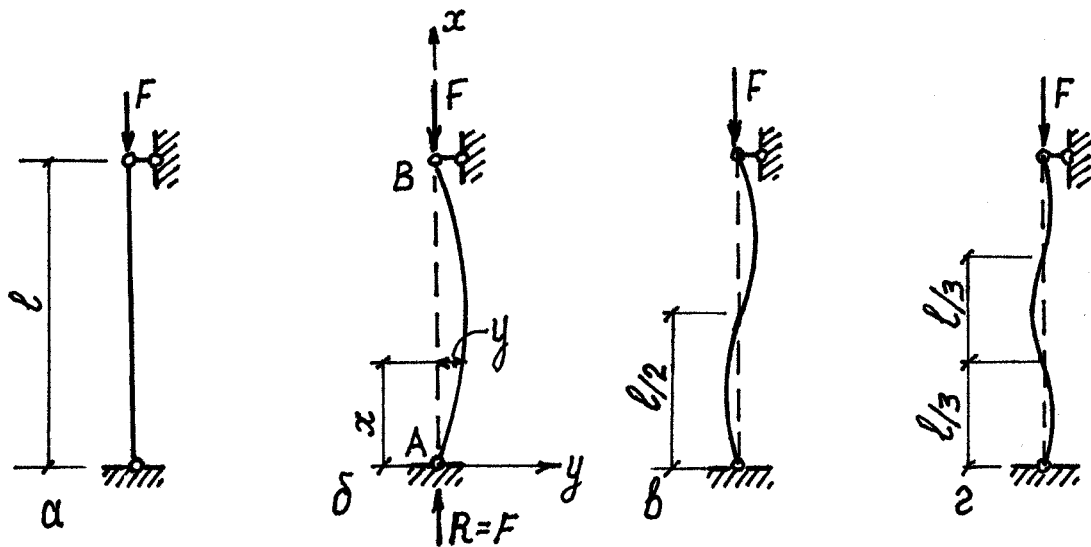


Рис. 9

Применяя статический метод рассмотрим равновесие стержня в смежном состоянии (рис. 9, б). Так как число степеней свободы стержня конечной жесткости $W = \infty$, условие равновесия запишем в дифференциальной форме

$$EIy'' = M. \quad (4)$$

Изгибающий момент в сечении стержня в смежном состоянии

$$M = -F \cdot y.$$

С учетом этого дифференциальное уравнение (4) принимает вид

$$EIy'' = -Fy$$

или

$$y'' + \frac{F}{EI} y = 0. \quad (5)$$

Введя обозначение

$$n^2 = \frac{F}{EI}, \quad (6)$$

получаем стандартное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + n^2 y = 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x. \quad (8)$$

Запишем граничные условия:

1) при $x = 0$ $y = 0$; 2) при $x = l$ $y = 0$.

Из первого условия находим $C_2 = 0$, а второе дает

$$C_1 \sin nl = 0$$

или, так как $C_1 \neq 0$, $\sin nl = 0$.

Последнему соотношению соответствует бесконечный ряд:

$$nl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (9)$$

Рассмотрим первое ненулевое решение $n_1 l = \pi$.

С учетом (6) получаем

$$\sqrt{\frac{F_{16}}{EI}} \quad l = \pi,$$

откуда первая бифуркационная сила

$$F_{16} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (10)$$

Эта формула получена Эйлером и носит его имя.

Подставим $n_1 = \frac{\pi}{l}$ в уравнение (8). С учетом $C_2 = 0$ получаем

$$y_1 = C_1 \sin \frac{\pi \cdot x}{l}. \quad (11)$$

Таким образом, первой бифуркационной силе соответствует деформация стержня по одной полуволне синусоиды (рис. 9, б).

Второму решению ряда (9) соответствует

$$n_2 = \frac{2\pi}{l}; \quad F_{26} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{и} \quad y_2 = C_1 \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{l}.$$

Последнее соотношение представляет деформацию стержня по двум полуволнам синусоиды (рис. 9, в).

Продолжаем анализ для третьего решения (9):

$$n_3 = \frac{3\pi}{l}; \quad F_{36} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{и} \quad y_3 = C_1 \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot x}{l}.$$

Соответствующая этому решению третья форма потери устойчивости показана на рис. 9, г.

Очевидно, что этот ряд форм потери устойчивости и бифуркационных сил бесконечен и отвечает бесконечному числу степеней свободы стержня.

Как следует из определения, критической силой является наименьшая из полученных бифуркационных сил:

$$F_{кр} = F_{1б} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Заметим, что так же, как и в примере, рассмотренном в п.2.3, реализация второй и далее форм потери устойчивости возможна только при постановке дополнительных связей, препятствующих перемещениям первой формы потери устойчивости. Так, для реализации второй формы потери устойчивости в последнем примере возможна лишь при постановке опорного стержня в середине пролета стержня.

Таким образом, постановка дополнительных связей приводит к увеличению жесткости системы в целом и, соответственно, к увеличению критической силы.

3.2. Критическая сила для прямого сжатого стержня постоянной жесткости при различных закреплениях его концов

Формулу Эйлера (10) можно распространить на другие варианты закрепления концов стержня. Для этого следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Формы потери устойчивости шарнирно закрепленного стержня (рис. 9) отличаются друг от друга количеством полуволин синусоиды, укладываемых на длине стержня при его изгибе. Так, для второй формы это число составляет два, для третьей – три и т.д.

Каждая часть стержня, на который укладывается одна полуволна синусоиды l_c , ведет себя так же, как отдельный стержень длиной l_c . Действительно, при второй форме потери устойчивости

$$l_c = 0,5 \cdot l \quad F_{2б} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5 \cdot l)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

при третьей

$$l_c = \frac{l}{3} \quad F_{3б} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{3}\right)^2} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}$$

и т.д.

В соответствии с этим получают формулу для определения критической силы при разных закреплениях концов стержня:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (12)$$

где μ - коэффициент приведения длины, показывающий долю длины стержня, на которой при его изгибе укладывается одна полуволна синусоиды.

Значения коэффициента μ приведены на рис. 10.

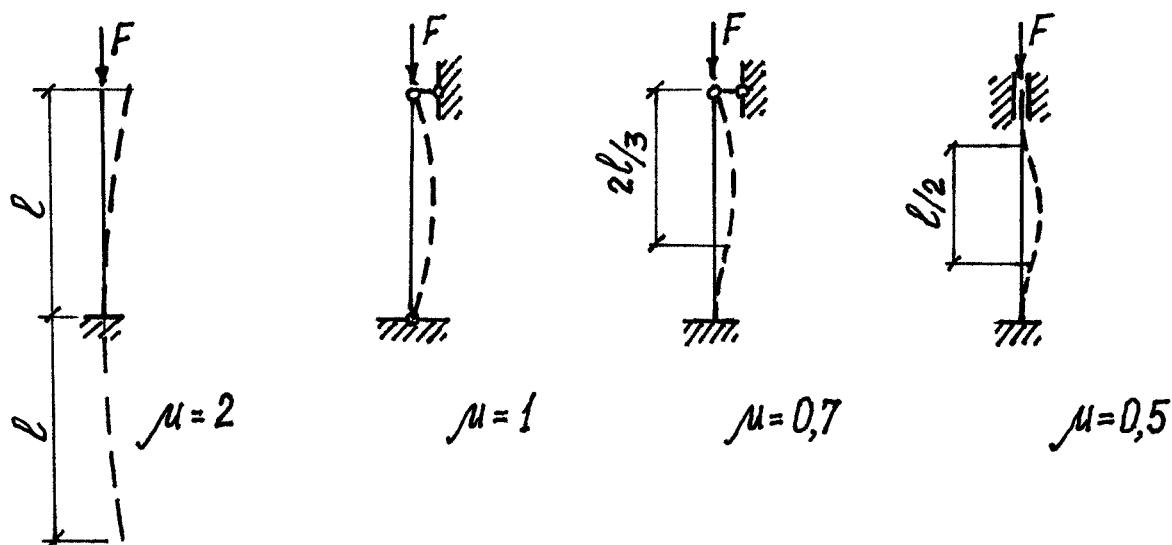


Рис. 10

3.3. Критические напряжения. Устойчивость за пределом упругости

Критические напряжения соответствуют критической нагрузке:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A}. \quad (13)$$

Напомним, что выражение (12) получено в предположении упругой стадии работы материала, поэтому напряжения (13) не должны превышать предел пропорциональности:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}.$$

Обозначим

$$\lambda = \sqrt{\frac{I}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A}} = \frac{i}{\mu \cdot l} \quad (14)$$

– гибкость стержня,

где $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – радиус инерции сечения.

Тогда получаем

$$\sigma_{кр} = \pi^2 \cdot E \cdot \lambda^2 \leq \sigma_{пц},$$

откуда предельное значение гибкости, при которой материал при потере устойчивости работает в упругой стадии

$$\lambda_{пред.} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{пц}}{E}}. \quad (15)$$

При $\lambda < \lambda_{пред.}$ появляются пластические деформации и формула Эйлера неприменима.

В этом случае пользуются эмпирической формулой Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda \quad (16)$$

или

$$F_{кр} = A \cdot (a - b \cdot \lambda).$$

Коэффициенты в (16), например, для стали Ст.3 такие: $a = 310$, $b = 1,14$.

Если $\sigma_{кр}$, найденное по формуле (16), достигает значения σ_T , стержень не может потерять устойчивость, раньше наступает нарушение его прочности.

Для стали Ст.3 зависимость между гибкостью стержня и критической силой может быть представлена диаграммой, приведенной на рис. 11.

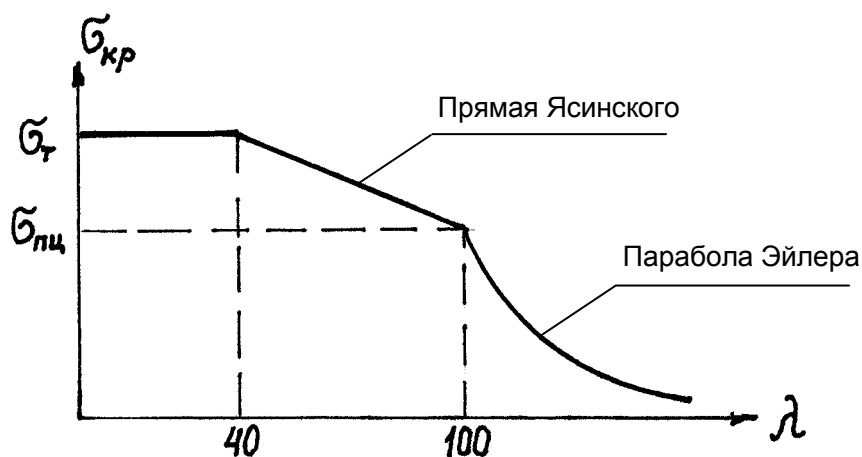


Рис. 11

3.4. Расчет сжатых стержней на прочность с учетом устойчивости

В инженерной практике расчет на устойчивость ведут аналогично расчету на прочность.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]_y. \quad (17)$$

При этом допускаемые напряжения устойчивости $[\sigma]_y$ определяют через допускаемые напряжения для сжатия введением понижающего коэффициента φ :

$$[\sigma]_y = [\sigma]_{сж.} \cdot \varphi. \quad (18)$$

Коэффициент φ называется коэффициентом продольного изгиба. Его значения для разных материалов приводятся в нормах в зависимости от значений гибкости λ .

3.5. Метод начальных параметров

Если стержень можно разбить на участки постоянного сечения с постоянной продольной силой, решение дифференциального уравнения равновесия можно получить в форме метода начальных параметров.

Рассмотрим участок длиной l стержня постоянного сечения с постоянной продольной силой N в смежном состоянии (рис. 12).

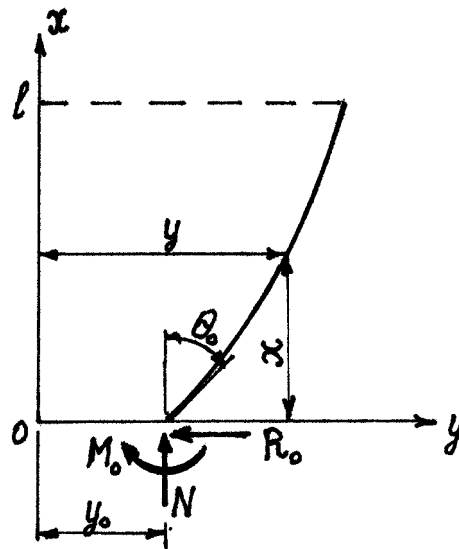


Рис. 12

В начале координат (начале участка в недеформированном состоянии) действуют изгибающий момент M_o , условная поперечная сила R_o (сила, перпендикулярная оси стержня в исходном состоянии). Прогиб и угол поворота сечения в начале координат равны соответственно y_o и θ_o . Величины M_o , R_o , y_o и θ_o называются *начальными параметрами*.

Изгибающий момент в сечении на расстоянии x от начала участка

$$M = -M_o - R_o x - N(y - y_o)$$

и дифференциальное уравнение равновесия (уравнение упругой линии)

$$EIy'' = M$$

запишется так:

$$EIy'' = -M_o - R_o x - N(y - y_o).$$

Разделив все члены уравнения на EI и введя, как обычно, обозначение $n^2 = \frac{N}{EI}$, получаем дифференциальное уравнение равновесия в форме метода начальных параметров:

$$y'' + n^2 \cdot y = y_o \cdot n^2 - M_o \frac{n^2}{N} - R_o \frac{n^2}{N} x. \quad (19)$$

Решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + y_o - \frac{M_o}{N} - \frac{R_o}{N} x. \quad (20)$$

Для определения постоянных используем граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad y = y_o \quad \text{и} \quad y' = \theta_o.$$

Первое условие дает $C_2 = \frac{M_o}{N}$. Записывая первую производную прогиба

$$y' = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin x - \frac{R_o}{N},$$

используем второе условие, из которого получаем

$$C_1 = \frac{\theta_o}{n} + \frac{R_o}{nF}.$$

Подставляя постоянные C_1 и C_2 в (20), имеем окончательно

$$y = y_o + \theta_o \frac{\sin nx}{n} + \frac{M_o}{N} (\cos nx - 1) + \frac{R_o}{N} \left(\frac{\sin nx}{n} - x \right). \quad (21)$$

Дифференцируя (21) по x , получаем углы поворота и изгибающие моменты:

$$\theta = y' = \theta_o \cos nx - \frac{M_o}{N} n \sin nx + \frac{R_o}{N} (\cos nx - 1); \quad (22)$$

$$M = EI y'' = -EI \theta_o \sin nx - M_o \cos nx - R_o \frac{\sin x}{n}. \quad (23)$$

Последовательность применения метода начальных параметров следующая:

- разбивая стержень на участки постоянной жесткости с постоянной продольной силой, записывают уравнения (21), (22), (23) для каждого из них. Если на границах участков величины угла поворота, изгибающего момента и условной поперечной силы меняются скачкообразно, соответствующие величины $\Delta\theta$, ΔM и ΔR учитываются в уравнениях дополнительными слагаемыми;
- записывают граничные условия и условия стыковки участков. С учетом уравнений (21), (22), (23) получают систему линейных алгебраических

уравнений относительно начальных параметров и приращений $\Delta\theta$, ΔM и ΔR с переменными коэффициентами;

- ненулевые решения полученной системы находят, приравнявая нулю ее определитель;
- раскрывая определитель, получают уравнение устойчивости, решение которого дает величины параметра n_{δ} , и далее

$$N_{\delta} = n_{\delta}^2 EI.$$

Окончательно искомая критическая сила

$$N_{кр} = \min(N_{\delta}).$$

3.6. Дифференциальное уравнение четвертого порядка

В некоторых задачах устойчивости используется дифференциальное уравнение равновесия четвертого порядка. Оно является более общим по сравнению с уравнением второго порядка $EIy'' = M$.

Рассмотрим сжатый консольный стержень (рис. 13,а). Выделив элемент стержня длиной dx , рассмотрим его равновесие в смежном состоянии (рис. 13,б). Учитывая малость угла θ , считаем, что поперечная сила Q может быть принята равной условной поперечной силе R , а продольная сила N соответственно сжимающей силе F .

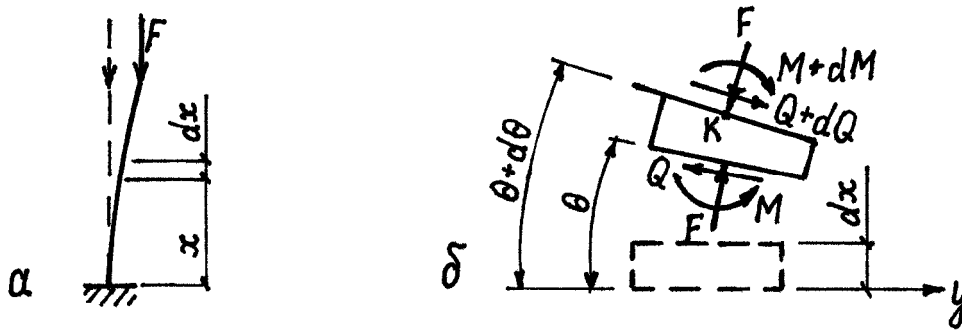


Рис. 13

Имея в виду, что $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta = y'$ и $d\theta = y'' dx$, спроектируем силы на ось y :

$$\Sigma y = Q + dQ - Q + Fy' - F(y' + y'' dx) = 0,$$

откуда $\frac{dQ}{dx} = -Fy''$.

Из условия $\Sigma M_k = 0$ получаем $Q = \frac{dM}{dx}$. Тогда

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = -Fy''.$$

Так как $M = EIy''$, получаем

$$(EIy'')'' = -Fy''.$$

Для стержня постоянного сечения это дает

$$y^{IV} + n^2 y'' = 0, \quad (24)$$

где $n^2 = \frac{F}{EI}$.

Решение уравнения (24) имеет вид

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + C_3 x + C_4.$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 определяют из граничных условий.

Вопросы для самопроверки:

1. Чем отличаются условия равновесия для системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы?
2. Для какого стержня критическая сила находится по формуле Эйлера?
3. Как в формуле Эйлера учитываются условия закрепления концов стержня?
4. Как изменяется критическая сила при добавлении опорных закреплений?
5. Как определяется критическая сила при напряжениях, превышающих предел пропорциональности?
6. Что такое коэффициент продольного изгиба φ ?
7. Что такое начальные параметры?
8. Чем отличается условная поперечная сила R от обычной поперечной силы Q ?
9. Когда применяется метод начальных параметров?
10. Как применяется метод начальных параметров?
11. Как получают дифференциальное уравнение равновесия четвертого порядка?

4. Устойчивость рам

4.1. Основные положения

При расчете рам на устойчивость обычно принимаются следующие допущения:

1. Считается, что потеря устойчивости происходит в упругой стадии работы материала.
2. Нагрузка приложена только в узлах рамы. Внеузловая нагрузка (приложенная к стержням) распределяется в узлы.
3. Предполагается, что узловые силы меняются пропорционально одному параметру.
4. Поперечными и продольными деформациями при определении перемещений пренебрегают.
5. Изменением расстояний между концами стержней, вызванным их изгибом, пренебрегают.
6. Перемещения вычисляют при начальных значениях сжимающих сил, а их приращения, возникающие при потере устойчивости, не учитывают.
7. При определении поперечных сил считают, что при изгибе стержней углы наклона их сечений не изменяются.

Принятые допущения позволяют рассчитать раму на устойчивость с точностью, достаточной для практических целей.

Рассмотрим раму (рис. 14), загруженную силами, изменяющимися пропорционально параметру F (α_1 , α_2 и α_3 – фиксированные коэффициенты). При нагрузке, меньшей критической, рама находится в исходной – прямолинейной форме равновесия. Стержни рамы испытывают только осевое сжатие, изгиб отсутствует. В силу принятых допущений узлы рамы не смещаются.

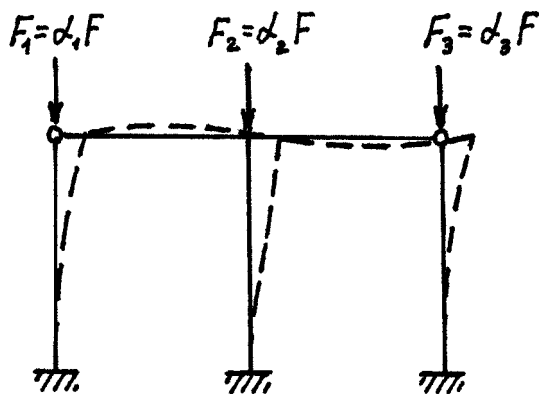


Рис. 14

При критической нагрузке исходная форма равновесия становится неустойчивой, появляется возможность смежного равновесного состояния, характеризующегося малыми искривлениями осей стержней. В смежном состоянии рамы появляются дополнительные усилия в связях, а узлы рамы испытывают перемещения.

Для определения критической нагрузки применяют метод сил и метод перемещений. В методе сил критерием устойчивости является условие отсутствия дополнительных усилий в связях, а в методе перемещений – условие отсутствия перемещений узлов.

4.2. Расчет рам на устойчивость методом перемещений

Степень кинематической неопределенности $n = n_y + n_{\text{л}}$ и основную систему выбирают при расчете на устойчивость так же, как и в обычном статическом расчете. В силу принятых допущений реакции R_{if} в связях основной системы от заданной нагрузки отсутствуют и система канонических уравнений метода будет однородной:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n &= 0, \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

При смещениях связей основной системы в стержнях появляются деформации изгиба и сжимающие силы вызывают дополнительный изгиб, зависящий от величины смещения связей и величины сжимающих сил. В связи с этим эпюры \overline{M}_i в основной системе от действия единичных смещений связей должны строиться с учетом действия нагрузки.

Тогда реакции r_{ik} в связях основной системы от единичных смещений связей будут являться функциями продольных сил, точнее, функциями параметров устойчивости стержней $v = nl \left(n = \sqrt{\frac{N}{EI}} \right)$. Отметим, что в задачах устойчивости сжимающие силы N считаются положительными.

Система уравнений (25) имеет два решения:

$$Z_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

и

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Первое решение не имеет смысла, так как соответствует исходному состоянию рамы, поэтому уравнение устойчивости получаем, раскрывая определитель (26).

Как и в статическом расчете, эпюры изгибающих моментов строят, используя таблицы расчета стержней постоянной жесткости. Отметим, что эпюры моментов в стержнях, испытывающих продольно-поперечный изгиб (изгиб со сжатием), криволинейны, а в стержнях, испытывающих только поперечный изгиб (без сжатия), – линейны.

Реакции r_{ik} в связях основной системы определяются, как и в обычном расчете, из равновесия узлов или частей рамы, в которых действуют данные реакции.

Уравнение устойчивости, получающееся раскрытием определителя (26), в левой части содержит трансцендентную функцию параметра устойчивости ν и в замкнутом виде не решается. Поэтому критический параметр ν находим путем подбора. Критическую силу получаем из формулы для параметра ν :

$$\nu = nl = l\sqrt{\frac{N}{EI}}, \quad (27)$$

т.е.

$$N_{kp} = \frac{\nu^2 EI}{l^2}. \quad (28)$$

4.3. Изгибающие моменты и реакции в сжато-изогнутых стержнях основной системы метода перемещений

Напомним, что в основной системе метода перемещений каждый стержень работает независимо от остальных и при этом возможны варианты закреплений концов, показанные на рис. 15.

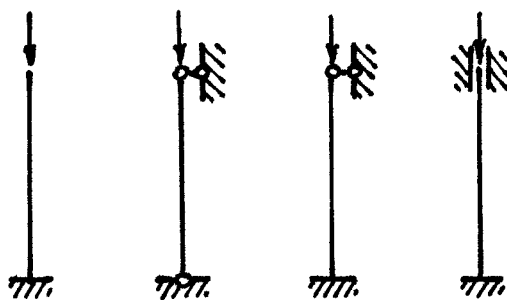


Рис. 15

Как и при обычном поперечном изгибе, эти стержни могут быть заранее рассчитаны на продольно-поперечный изгиб.

В качестве примера покажем расчет стержня, приведенного на рис. 16,а, при повороте заделки на угол $\varphi = 1$.

Применяя статический метод, запишем дифференциальное уравнение равновесия:

$$EIy'' = M.$$

Изгибающий момент в сечении на расстоянии x от заделки в смежном состоянии (сплошная линия на рис. 16,а) будет

$$M = -N \cdot y - R \cdot x. \quad (29)$$

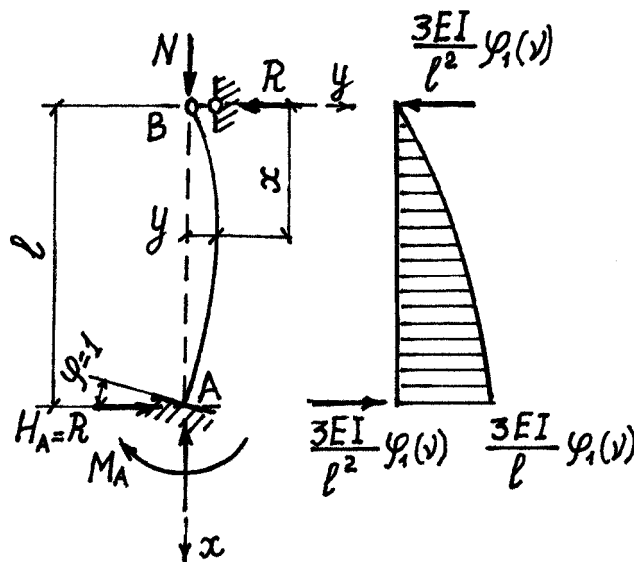


Рис. 16

Тогда

$$EIy'' = -Ny - R \cdot x.$$

Введя, как обычно, обозначение $n^2 = \frac{N}{EI}$, запишем это уравнение в таком виде:

$$y'' + n^2 y = -\frac{R}{N} n^2 x. \quad (30)$$

Решение полученного неоднородного дифференциального уравнения дает прогибы

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx - \frac{R}{N} x$$

и углы поворота

$$\theta = y' = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx - \frac{R}{N}$$

в смежном состоянии.

Запишем граничные условия задачи:

при $x = 0$ $y = 0$,

при $x = l$ $y = 0$ и $\theta = -\varphi = -1$.

Из первого условия получаем

$$C_2 = 0,$$

из второго

$$C_1 \sin nl + C_2 \cos nl = \frac{R}{N} l,$$

откуда: $C_1 = \frac{R}{N} \frac{l}{\sin nl}$.

И, наконец, из третьего условия

$$C_1 n \cos nl - \frac{R}{N} = -1,$$

откуда после подстановки C_1 находим:

$$R = N \frac{\operatorname{tg} nl}{\operatorname{tg} nl - nl} = n^2 EI \frac{\operatorname{tg} nl}{\operatorname{tg} nl - nl}.$$

С учетом обозначения (27) параметра устойчивости перепишем выражение для реакции R , выделив в нем размерную часть, соответствующую значению $\frac{3EI}{l^2}$ реакции в таком же стержне без продольного сжатия:

$$R = \frac{3EI}{l^2} \varphi_1(v), \quad (31)$$

где $\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$ – безразмерная функция параметра устойчивости

стержня, учитывающая действие сжимающей силы.

Опорный момент в заделке

$$M_A = Rl = \frac{3EI}{l} \times \varphi_1(v).$$

Как следует из (29), изгибающие моменты в стержнях меняются по нелинейному закону (рис. 16,б).

Аналогично выполняется расчет стержней с различными закреплениями концов на действия единичных перемещений. Схемы стержней, соответствующие эпюры изгибающих моментов и опорные реакции приведены в табл. 1. Безразмерные функции параметров устойчивости, входящие в выражения реакций и моментов, в табл. 1 имеют следующий вид:

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)};$$

$$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right);$$

$$\varphi_5(v) = v \operatorname{tg} v; \quad \eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)};$$

$$\eta_2(v) = \eta_1\left(\frac{v}{2}\right); \quad \eta_3(v) = v^2.$$

Значения функций $\varphi_i(v)$ и $\eta_i(v)$, кроме легко вычисляемой функции $\eta_3(v)$, приведены в табл. 2, 3.

Отметим, что первыми четырьмя пунктами табл. 1 можно воспользоваться для расчета стержней, испытывающих только поперечный изгиб (при $N = 0$). Для этого достаточно в выражениях моментов и реакций отбросить функции параметров устойчивости, а эпюры изгибающих моментов показать линейными (пунктирные линии на соответствующих эпюрах в табл. 1). Следует помнить, что для стержней в п. 5, 6 табл. 1 при отсутствии продольных сил моменты и реакции отсутствуют.

Таблица 1

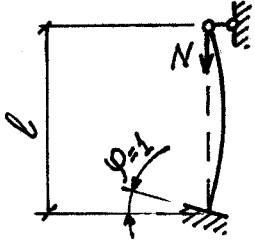
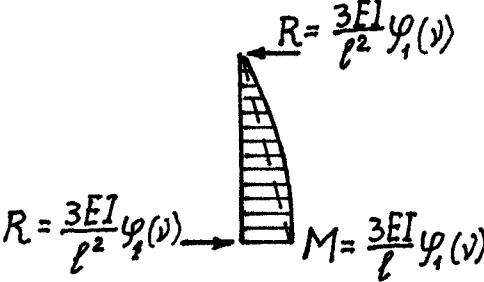
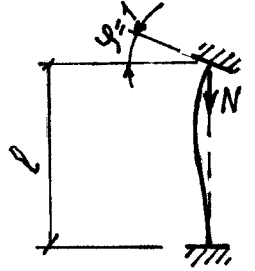
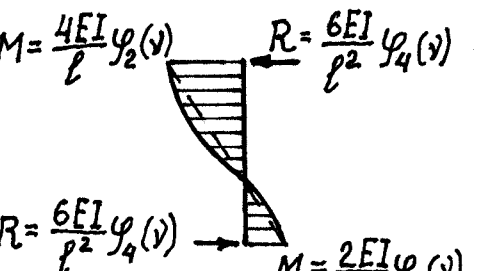
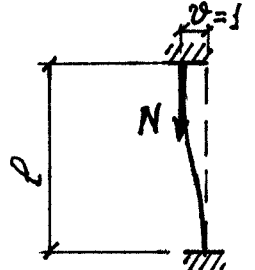
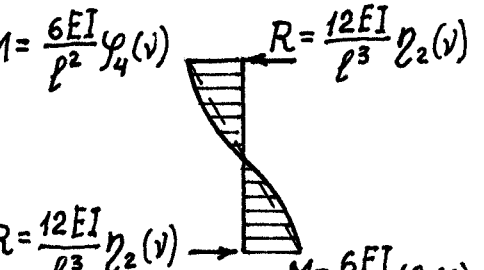
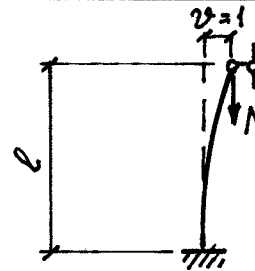
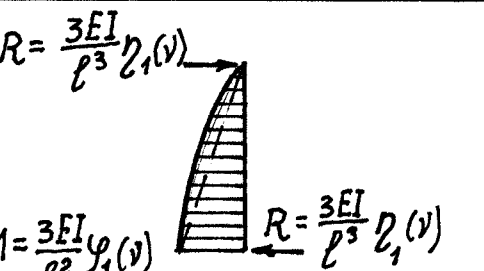
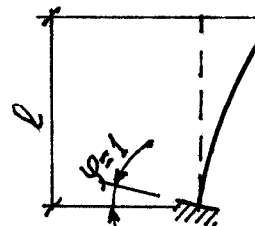
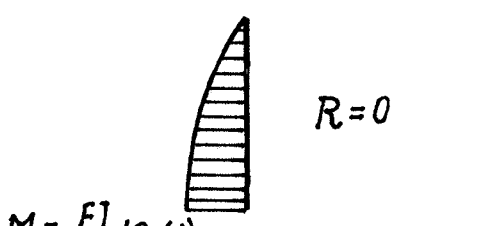
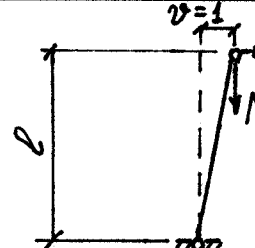
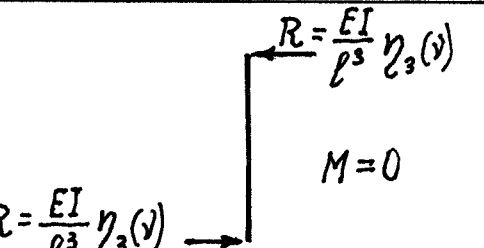
№ п/п	Вид стержня и воздействия	Эпюры моментов и реакции
1		 $R = \frac{3EI}{l^2} \varphi_1(v)$ $R = \frac{3EI}{l^2} \varphi_1(v)$ $M = \frac{3EI}{l} \varphi_1(v)$
2		 $M = \frac{4EI}{l} \varphi_2(v)$ $R = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $R = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $M = \frac{2EI}{l} \varphi_3(v)$
3		 $M = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $R = \frac{12EI}{l^3} \varphi_2(v)$ $R = \frac{12EI}{l^3} \varphi_2(v)$ $M = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$
4		 $R = \frac{3EI}{l^3} \varphi_1(v)$ $M = \frac{3EI}{l^2} \varphi_1(v)$ $R = \frac{3EI}{l^3} \varphi_1(v)$
5		 $R = 0$ $M = \frac{EI}{l} \varphi_5(v)$
6		 $R = \frac{EI}{l^3} \varphi_3(v)$ $R = \frac{EI}{l^3} \varphi_3(v)$ $M = 0$

Таблица 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9981	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	-0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	-0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	-0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	-0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0613	0,9277	-0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	-0,7749	0,5650

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9260	-0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	-0,8465	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	-1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	-1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	-1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	-1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	-1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	-1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	-1,3480	0,4295
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8991	-1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	-1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5602	0,3802

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6383	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6929	0,3495
2,56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	-1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	-1,7838	0,3286
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0192	0,2751
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-2,1170	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	-2,1667	0,2420
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	-2,2676	0,2192
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	-2,3707	0,1968
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1850
2,86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	-2,4760	0,1734
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	-2,5296	0,1616
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
2,92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	-2,6385	0,1379
2,94	0,1878	0,6717	1,1948	0,8462	-2,6939	0,1261

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	-2,7499	0,1138
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	-2,8066	0,1016
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	-2,9219	0,0770
3,04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	-2,9805	0,0646
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	-3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	-3,0991	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	-3,2848	0,0011
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2898	0
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	-3,3480	-0,0118
3,18	-0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	-3,4120	-0,0249
3,20	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,22	-0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	-3,5425	-0,0512
3,24	-0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	-3,6092	-0,0646
3,26	-0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	-3,6767	-0,0780
3,28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7453	-0,0915
3,30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,32	-0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187
3,34	-0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	-3,9568	-0,1324
3,36	-0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	-4,0295	-0,1463
3,38	-0,2951	0,5433	1,2889	0,7918	-4,1032	-0,1602

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,42	-0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	-4,2540	-0,1884
3,44	-0,3873	0,5231	1,3045	0,7835	-4,3318	-0,2026
3,46	-0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	-4,4107	-0,2169
3,48	-0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	-4,4910	-0,2313
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,52	-0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	-4,6560	-0,2602
3,54	-0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	-4,7410	-0,2748
3,56	-0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	-4,8276	-0,2894
3,58	-0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	-4,9160	-0,3042
3,60	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,62	-0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	-5,0984	-0,3340
3,64	-0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	-5,1928	-0,3491
3,66	-0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	-5,2895	-0,3643
3,68	-0,8745	0,4345	1,3766	0,7483	-5,3886	-0,3797
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,72	-0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	-5,5947	-0,4107
3,74	-1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	-5,7020	-0,4263
3,76	-1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	-5,8124	-0,4420
3,78	-1,1034	0,3935	1,4217	0,7329	-5,9262	-0,4578

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,82	-1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	-6,1650	-0,4895
3,84	-1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056
3,86	-1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	-6,4208	-0,5217
3,88	-1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	-6,5561	-0,5379
3,90	-1,6468	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
3,92	-1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	-6,8435	-0,5706
3,94	-1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	-6,9972	-0,5871
3,96	-1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	-7,1582	-0,6037
3,98	-2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	-7,3274	-0,6204
4,00	-2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,02	-2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	-7,6942	-0,6541
4,04	-2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	-7,8952	-0,6710
4,06	-2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	-8,1087	-0,6881
4,08	-2,7888	0,2529	1,5400	0,6819	-8,3376	-0,7053
4,10	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5839	-0,7225
4,12	-3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	-8,8496	-0,7398
4,14	-3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	-9,1394	-0,7573
4,16	-3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	-9,4562	-0,7749
4,18	-3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	-0,8065	-0,7925

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,20	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,22	-4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	-10,633	-0,8281
4,24	-5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	-11,129	-0,8460
4,26	-5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	-11,701	-0,8641
4,28	-6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	-12,367	-0,8822
4,30	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,32	-7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	-14,116	-0,9188
4,34	-9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	-15,309	-0,9372
4,36	-10,503	0,0912	1,7033	0,6284	-16,840	-0,9557
4,38	-12,523	0,0781	1,7170	0,6243	-18,918	-0,9744
4,40	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-21,783	-0,9931
4,42	-19,703	0,0513	1,7452	0,6161	-26,215	-1,0119
4,44	-27,349	0,0376	1,7602	0,6119	-33,920	-1,0309
4,46	-44,158	0,0237	1,7754	0,6077	-50,779	-1,0499
4,48	-111,57	0,0096	1,7910	0,6034	-118,26	-1,0691
4,50	+226,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,52		-0,0194	1,8234	0,5948		-1,1077
4,54		-0,0343	1,8402	0,5905		-1,1271
4,56		-0,0495	1,8575	0,5861		1,1457
4,58		-0,0650	1,8752	0,5817		-1,1662
4,60		-0,0807	1,8933	0,5772		-1,1861
4,62		-0,0969	1,9119	0,5772		-1,2060
4,64		-0,1133	1,9110	0,5681		-1,2250

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,66		-0,1201	1,9507	0,5665		-1,2461
4,68		-0,1472	1,9710	0,5589		-1,2663
4,70		-0,1646	1,9919	0,5543		-1,2165
$3/2\pi$		-0,1755	2,0052	0,5514		-1,2992
4,72		-0,1824	2,0134	0,5496		-1,3069
4,74		-0,2005	2,0355	0,5449		-1,3274
4,76		-0,2190	2,0582	1,5402		-1,3480
4,78		-0,2379	2,0816	0,5354		-1,3586
4,80		-0,2572	2,1056	0,5305		-1,3896
4,82		-0,2770	2,1304	0,5255		-1,4105
4,84		-0,2973	2,1506	0,5205		-1,4316
4,86		-0,3181	2,1824	0,5155		-1,4528
4,88		-0,3394	2,2096	0,5105		-1,4743
4,90		-0,3612	2,2377	0,5054		-1,4954
4,92		-0,3834	2,2667	0,5003		-1,5169
4,94		-0,4061	2,2966	0,4951		-1,5385
4,96		-0,4293	2,3275	0,4899		-1,5602
4,98		-0,4530	2,3594	0,4846		-1,5821
5,00		-0,4772	2,3924	0,4793		-1,6040
5,02		-0,5022	2,4265	0,4739		-1,6261
5,04		-0,5280	2,4620	0,4685		-1,6483
5,06		-0,5545	2,4986	0,4630		-1,6706
5,08		-0,5818	2,5365	0,4576		-1,6929

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,10		-0,6099	2,5757	0,4520		-1,7155
5,12		-0,6388	2,6164	0,4464		-1,7381
5,14		-0,5685	2,6587	0,4407		-1,7609
5,16		-0,6999	2,7027	0,4350		-1,7838
5,18		-0,7306	2,7485	0,4292		-1,8078
5,20		-0,7630	2,7961	0,4234		-1,8299
5,22		-0,7964	2,8454	0,4175		-1,8532
5,24		-0,8310	2,8968	0,4116		-1,8765
5,26		-0,8668	2,9504	0,4056		-1,9000
5,28		-0,9039	3,0064	0,3996		-1,9236
5,30		-0,9423	3,0648	0,3931		-1,9477
5,32		-0,9821	3,1257	0,3873		-1,9712
5,34		-1,0233	3,1893	0,3811		-1,9952
5,36		-1,0660	3,2559	0,3748		-2,0193
5,38		-1,1103	3,3267	0,3685		-2,0435
5,40		-1,1563	3,3989	0,3621		-2,0679
5,42		-1,2043	3,4757	0,3556		-2,0924
5,44		-1,2544	3,5563	0,3491		-2,1170
5,46		-1,3067	3,6409	0,3425		-2,1418
5,48		-1,3612	3,7298	0,3358		-2,1667
5,50		-1,4181	3,8234	0,3291		-2,1917
5,52		-1,4777	3,9222	0,3223		-2,2169
5,54		-1,5402	4,0267	0,3154		-2,2422

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,56		-1,6059	4,1374	0,3085		-2,2676
5,58		-1,6751	4,2549	0,3015		-2,2932
5,60		-1,7481	4,3794	0,2944		-2,3189
5,62		-1,8252	4,5118	0,2873		-2,3447
5,64		-1,9065	4,6526	0,2801		-2,3707
5,66		-1,9920	4,8026	0,2727		-2,3969
5,68		-2,0833	4,9629	0,2654		-2,4231
5,70		-2,1804	5,1346	0,2580		-2,4495
5,72		-2,2833	5,3190	0,2505		-2,4760
5,74		-2,3944	5,5173	0,2429		-2,5027
5,76		-2,5130	5,7314	0,2352		-2,5996
5,78		-2,6406	5,9628	0,2374		-2,5466
5,80		-2,7677	6,2140	0,2195		-2,5838
5,82		-2,9262	6,4873	0,2116		-2,6111
5,84		-3,0876	6,7859	0,2036		-2,6385
5,86		-3,2634	7,1132	0,1955		-2,6661
5,88		-3,4562	7,4738	0,1873		-2,6939
5,90		-3,6678	7,8726	0,1790		-2,7218
5,92		-3,9018	8,3163	0,1706		-2,7499
5,94		-4,1603	8,8122	0,1621		-2,7782
5,96		-4,4547	9,3706	0,1535		-2,8066
5,98		-4,7816	10,004	0,1448		-2,8352

Продолжение табл. 2

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
6,00		-5,1589	10,727	0,1361		-2,8639
6,02		-5,5845	11,561	0,1272		-2,8928
6,04		-6,0653	12,534	0,1182		-2,9219
6,06		-6,6753	13,683	0,1091		-2,9512
6,08		-7,3699	15,060	0,0999		-2,9805
6,10		-8,2355	16,739	0,0906		-3,0102
6,12		-9,2939	18,832	0,0812		-3,0400
6,14		-10,646	21,511	0,0717		-3,0699
6,16		-12,440	25,065	0,0621		-3,0991
6,18		-14,921	29,999	0,0523		-3,1304
6,20		-18,594	37,308	0,0424		-3,1609
6,22		-24,575	49,255	0,0324		-3,1916
6,24		-36,100	72,272	0,0223		-3,2225
6,26		-67,436	135,03	0,0121		-3,2535
6,28		-492,67	984,32	0,0017		-3,2848
2π		$-\infty$	$+\infty$	0		-3,2898

Таблица 3

ν	$\varphi_5(\nu)$	ν	$\varphi_5(\nu)$	ν	$\varphi_5(\nu)$	ν	$\varphi_5(\nu)$
0,00	0,0000	0,70	0,5896	1,00	1,5574	1,30	4,6828
0,10	0,0100	0,72	0,6315	1,02	1,6607	1,32	5,1524
0,20	0,0405	0,74	0,6757	1,04	1,7718	1,34	5,7025
0,30	0,0928	0,76	0,7223	0,06	1,89,15	1,36	6,3559
0,40	0,1691	0,78	0,7716	1,08	2,0209	1,38	7,1449
0,50	0,2732	0,80	0,8237	1,10	2,1612	1,40	8,1170
0,52	0,2977	0,82	0,8788	1,12	2,3139	1,42	9,3452
0,54	0,3237	0,84	0,9371	1,14	2,4805	1,44	10,947
0,56	0,3511	0,86	0,9989	1,16	2,6631	1,46	13,123
0,58	0,3800	0,88	1,0645	1,18	2,8642	1,48	16,255
0,60	0,4105	0,90	1,1341	1,20	3,0866	1,50	21,152
0,62	0,4426	0,92	1,2082	1,22	3,3340	1,52	29,898
0,64	0,4765	0,94	1,2871	1,24	3,6108	1,54	49,990
0,66	0,5122	0,96	1,3712	1,26	3,9227	1,56	144,49
0,68	0,5499	0,98	1,4611	1,28	4,2769	1,58	-171,67

4.4. Понятие о расчете рам на устойчивость методом сил

Расчет рам на устойчивость методом сил выполняют в таком же порядке, как и обычный расчет на изгиб. При выборе основной системы появляются некоторые существенные особенности. Так, рационально выбирать такую основную систему, в которой изгибающие моменты от заданной узловой нагрузки отсутствуют. Например, для рамы на рис. 17,а рационально выбрать основную систему по рис. 17,б, но не ту, которая показана на рис. 17,в.

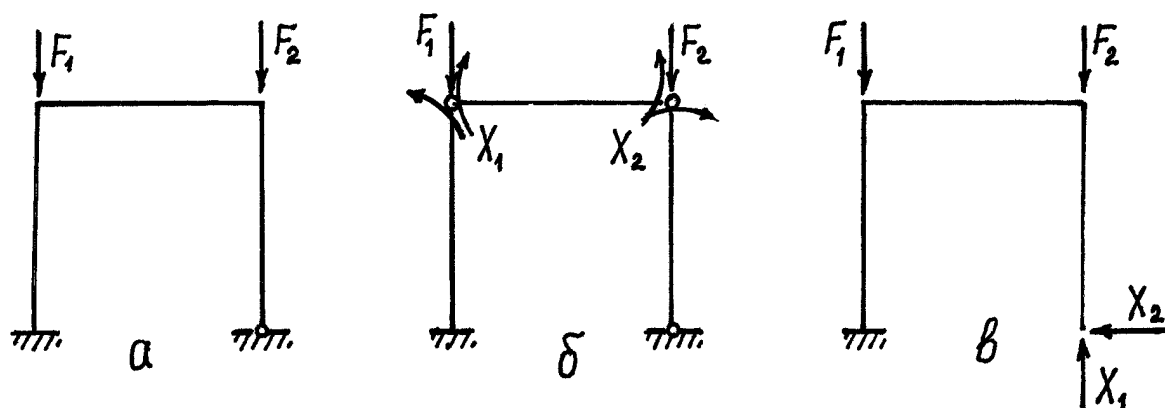


Рис. 17

Как и в методе перемещений, канонические уравнения являются однородными – без свободных членов:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n &= 0.\end{aligned}\tag{33}$$

Единичные перемещения δ_{ik} должны определяться с учетом заданной узловой нагрузки. В связи с этим в основной системе должны быть построены эпюры моментов M_k от неизвестных $X_k = 1$ с учетом заданной нагрузки и эпюры моментов \overline{M}_k только от единичных неизвестных X_k . Эпюры M_k на сжатых стержнях криволинейны, а эпюры \overline{M}_k на всех стержнях линейны.

При вычислении перемещений по формуле Мора

$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_i M_k dx$$

перемножение эпюр в пределах сжато-изогнутых стержней выполняют с помощью функций параметров устойчивости в зависимости от вида

перемножаемых эпюр (см., например, [3]). Правила этих вычислений в этом курсе не приводятся.

Как и в методе перемещений, критическую нагрузку определяют из условия равенства нулю определителя системы (33):

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Метод сил в расчетах на устойчивость, как правило, менее удобен, чем метод перемещений, из-за того, что определение δ_{ik} часто приводит к громоздким вычислениям.

4.5. Учет симметрии в расчетах рам на устойчивость

Расчет симметричных рам на устойчивость можно существенно упростить, если заранее выделить две возможные формы потери устойчивости: симметричную и кососимметричную.

Так, для рамы, приведенной на рис. 18,а, при использовании метода перемещений симметричной форме потери устойчивости (рис. 18,б) соответствует отсутствие горизонтальных перемещений ригеля и равенство углов поворота узлов (рис. 18,в). С другой стороны, кососимметричной форме потери устойчивости (рис. 18,г) соответствует равенство углов поворота и наличие горизонтального смещения ригеля (рис. 18,д).

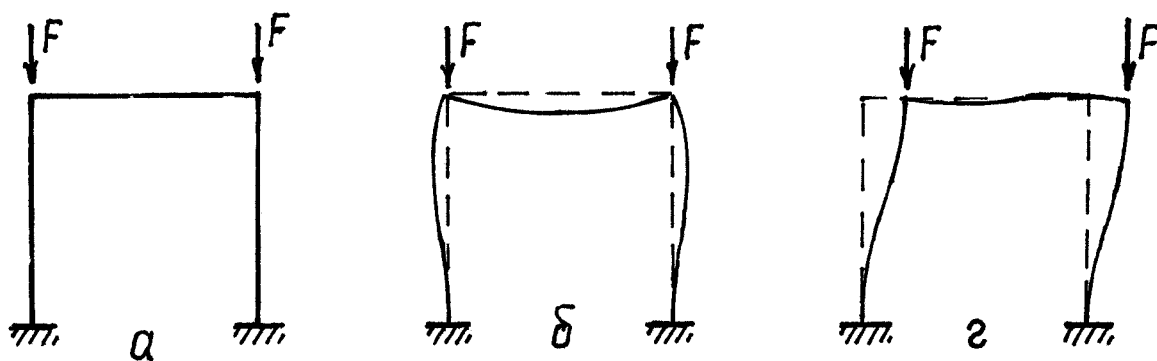


Рис. 18

Выполнив отдельно расчет по каждой форме потери устойчивости, критическую силу для рамы находят как меньшую из полученных значений:

$$F_{кр} = \min(F_{кр}^c ; F_{кр}^{kc}).$$

Вопросы для самопроверки:

1. Какие допущения принимают при расчете рам на устойчивость?
2. Из каких условий получают уравнения устойчивости в методе сил и в методе перемещений?
3. Какова особенность канонических уравнений в расчетах на устойчивость методом сил и методом перемещений?
4. Что такое параметр устойчивости стержня?
5. Какой характер имеют эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений в отличие от расчета на изгиб?
6. Как получают уравнение устойчивости рамы?
7. Как в выражениях изгибающих моментов и реакций в стержнях учитывается влияние продольных сил?
8. Как определяют коэффициенты канонических уравнений метода перемещений?
9. Как определяют критическую силу через параметр устойчивости?
10. Каковы особенности выбора основной системы рамы при расчете на устойчивость методом сил?
11. Как можно упростить расчет симметричных рам на устойчивость?

5. Приближенные методы расчета сжатых стержней на устойчивость

Среди приближенных методов можно выделить две группы. Это методы, основанные на применении энергетического критерия устойчивости, и методы, основанные на численном решении дифференциального уравнения равновесия.

К первой группе относятся методы Ритца–Тимошенко и Бубнова–Галеркина, ко второй – метод конечных разностей.

5.1. Метод Ритца–Тимошенко

В этом методе формой потери устойчивости задаются в виде ряда

$$y = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x), \quad (35)$$

где: a_i – некоторые коэффициенты, подлежащие определению;

$f_i(x)$ – линейно независимые функции, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям задачи.

Записывая выражение полной потенциальной энергии с учетом (35), получаем ее как функцию параметров a_i :

$$U_n = U_n(a_i).$$

Тогда условие минимума полной потенциальной энергии дает

$$\frac{\partial U_n}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (36)$$

Потенциальная энергия является квадратичной функцией прогибов, а следовательно, и квадратичной функцией параметров a_i . Поэтому условия (36) приводят к системе n однородных линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_i . Интересующее нас решение этой системы соответствует условию $a_i \neq 0$, следовательно, условию равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при a_i . Решение полученного раскрытием определителя уравнения устойчивости дает n значений силы. Наименьшее из них соответствует искомой критической силе для рамы.

Другая форма метода использует энергетический критерий устойчивости в виде принципа возможных перемещений:

$$U + W = 0.$$

Отметим, что задание формы потери устойчивости в виде ряда (35) эквивалентно наложению на систему некоторых связей, поэтому критическая сила по методу Ритца–Тимошенко получается завышенной.

Точность решения повышается, если при выборе функций $f_i(x)$ удовлетворять не только кинематическим, но и статическим граничным условиям задачи. Увеличение числа функций $f_i(x)$ также приводит к повышению точности.

5.2. Метод Бубнова–Галеркина

Этот метод основан на использовании свойств ортогональных функций. Две функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_k(x)$ ортогональны на отрезке $a \leq x \leq b$, если

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0.$$

Исходя из этого функция, соответствующая левой части дифференциального уравнения изгиба

$$EIy'' - M = 0,$$

ортогональна любой функции, так как ее значение равно нулю. В частности, для сжатого стержня, шарнирно закрепленного на концах

$$M = -Fy$$

и условие ортогональности

$$\int_{(l)} (EIy'' + Fy) y dx = 0 \quad (37)$$

будет выполнено.

Зададимся функцией прогиба в виде ряда

$$y = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x), \quad (38)$$

где a_i – коэффициенты, подлежащие определению;

$f_i(x)$ – некоторые функции, удовлетворяющие как кинематическим, так и статическим граничным условиям задачи.

При таком представлении функции прогибов условие ортогональности (37) уже не будет выполняться. Потребуем, чтобы условие ортогональности выполнялось по крайней мере для каждой из функций $f_i(x)$, входящих в (38):

$$\int_{(l)} (EIy'' + Fy) f_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

При подстановке y из (38) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \int_{(l)} [EIa_1 f_1''(x) + Fa_1 f_1(x)] f_i(x) dx + \int_{(l)} [EIa_2 f_2''(x) + Fa_2 f_2(x)] f_i(x) dx, + \\ & + \dots + \int_{(l)} [EIa_n f_n''(x) + Fa_n f_n(x)] f_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

или

$$C_{i1}a_1 + C_{i2}a_2 + \dots C_{in}a_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (40)$$

где

$$C_{ik} = \int_{(l)} [EI a_k f_k''(x) + F f_k(x)] f_i(x) dx.$$

Таким образом получаем систему линейных однородных уравнений (40) относительно a_i . Так как $a_i \neq 0$, то решение системы соответствует равенству нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

В этом методе уравнения получаются проще, чем в методе Ритца–Тимошенко. Сложности здесь состоят в подборе функций $f_i(x)$, так как они должны удовлетворять не только кинематическим, но и статическим граничным условиям. Этих затруднений можно избежать, если в качестве $f_i(x)$ принимать функции, соответствующие уравнению изогнутой оси стержня от поперечной нагрузки.

Методу Бубнова–Галеркина можно дать и энергетическую трактовку, если учесть, что $EI y'' - M$ дает проекцию сил, действующих на элемент стержня длиной dx , на ось y . Каждая из функций $f_i(x)$ представляет собой возможные перемещения стержня. Тогда условия (39) выражают принцип возможных перемещений.

При одинаковом задании функций $f_i(x)$, удовлетворяющих всем граничным условиям, методы Ритца–Тимошенко и Бубнова–Галеркина дают одинаковые результаты.

5.3. Метод конечных разностей

В методе конечных разностей непрерывная функция прогибов $y(x)$ задается в виде набора значений в ряде точек (рис. 19). Расстояния h между точками принимают одинаковыми и называют шагом разбиения.

Первую производную в точке i запишем так:

$$(y')_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (41)$$

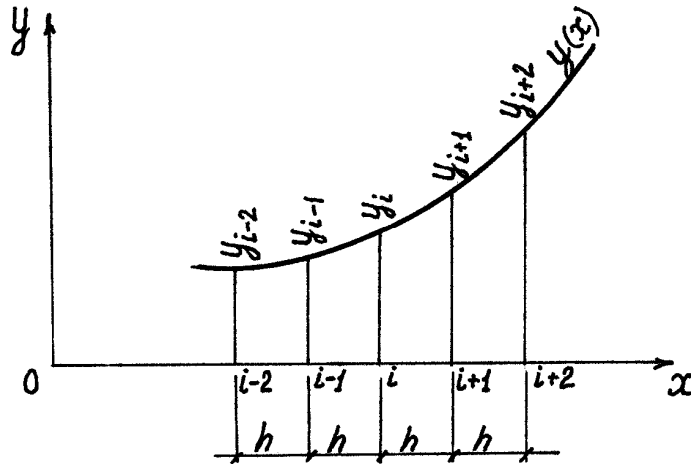


Рис. 19

Тогда вторая производная в этой же точке

$$(y'')_i = \frac{y'_{i+1} - y'_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2h} \left(\frac{y_{i+2} - y_i}{2h} - \frac{y_i - y_{i-2}}{2h} \right) =$$

$$= \frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}}{4h^2}.$$

Уменьшая интервал в два раза, получаем

$$(y'')_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (42)$$

Выражения в числителях (41), (42) называют конечными разностями, откуда и происходит название метода.

С учетом (41), (42) дифференциальное уравнение, например

$$EIy'' + Fy = 0,$$

для некоторой точки i запишется так:

$$EI_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + Fy_i = 0$$

или

$$y_{i-1} + \left(F \frac{h^2}{EI_i} - 2 \right) y_i + y_{i+1} = 0. \quad (43)$$

Составляя уравнение (43) для всех промежуточных точек ($i = 2, 3, \dots, n-1$), получаем $n-2$ линейных однородных алгебраических уравнений

относительно n величин y_i . Присоединяя к ним граничные условия, приходим к полной системе n уравнений. Значение критической силы получаем из условия равенства нулю определителя этой системы. Оно соответствует наименьшему ненулевому решению.

Точность решения повышается с уменьшением шага h .

Метод конечных разностей пригоден для расчета стержней с переменной и кусочно-постоянной жесткостью, с переменной продольной силой.

Вопросы для самопроверки:

1. В каком виде принимают функцию прогибов стержня в методах Ритца–Тимошенко и Бубнова–Галеркина?
2. Каким граничным условиям должны удовлетворять функции $f_i(x)$ в методе Ритца–Тимошенко? В методе Бубнова–Галеркина?
3. Какой критерий устойчивости используется в методе Ритца–Тимошенко?
4. На чем основан метод Бубнова–Галеркина?
5. Из какого условия получают уравнение относительно параметров a_i в методе Бубнова–Галеркина?
6. Каким образом методу Бубнова–Галеркина можно дать энергетическую трактовку?
7. Как можно увеличить точность расчетов в методах Ритца–Тимошенко и Бубнова–Галеркина?
8. Что положено в основу метода конечных разностей?
9. Как записываются производные в методе конечных разностей?
10. Сколько уравнений необходимо записать в методе конечных разностей?
11. От чего зависит точность расчетов в методе конечных разностей?

6. Устойчивость круговых арок и колец

6.1. Дифференциальное уравнение изгиба кривого бруса при потере устойчивости

Рассматриваем устойчивость колец и арок, очерченных по дуге окружности, находящихся под действием равномерно распределенной вдоль оси радиальной сжимающей нагрузки. В исходном состоянии такие арки испытывают только осевое сжатие. Моментами, возникающими при упругом обжатии, пренебрегаем. При потере устойчивости арка переходит в смежное состояние, в котором дополнительно к сжатию появляется изгиб. Продольными деформациями арки, как и в расчете рам, пренебрегаем.

Изменение кривизны оси $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}$ при переходе в смежное состояние пропорционально изгибающему моменту M :

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = -\frac{M}{EI}. \quad (44)$$

Здесь R и R_1 – радиусы кривизны бруса соответственно в исходном и смежном состоянии. Жесткость сечения EI будем считать постоянной. Изгибающий момент M положителен, если он уменьшает начальную кривизну бруса.

Выделим в кривом брусе (рис. 20) элемент mn длиной ds и рассмотрим его поведение при переходе в смежное состояние $m'n'$. При этом грани элемента испытывают повороты и линейные перемещения вдоль радиуса и вдоль касательной к оси бруса (рис. 21).

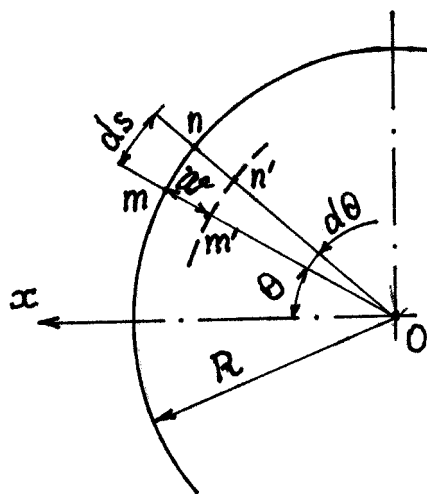


Рис. 20

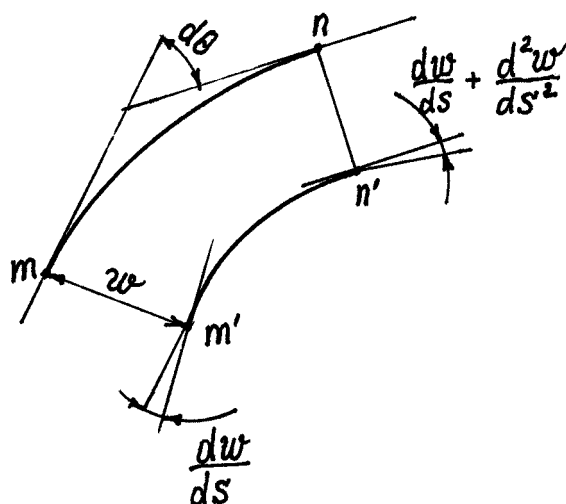


Рис. 21

Перемещения вдоль касательной не вызывают изгиба, поэтому их не учитываем. Радиальное перемещение w считаем положительным, если оно происходит в направлении центра кривизны.

В результате деформации сечение в точке m' поворачивается на угол $\frac{dw}{ds}$, а в точке n' – на угол $\frac{dw}{ds} + \frac{d}{ds}(\frac{dw}{ds})ds$ или $\frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2}ds$. Таким образом, угол между этими сечениями изменяется на $\frac{d^2w}{ds^2}ds$.

Кривизна оси в исходном состоянии

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (45)$$

а в смежном состоянии станет

$$\frac{1}{R_1} = (d\theta + \frac{d^2w}{ds^2}ds) / ds_1, \quad (46)$$

где ds_1 – длина элемента в изогнутом состоянии.

Так как деформации малы, секторы mOn и $m'O'n'$ на рис. 20 можно считать подобными:

$$\frac{ds}{R} = \frac{ds_1}{R-w},$$

откуда $ds_1 = (1 - \frac{w}{R})ds$.

Подставляя ds_1 в (46), получаем

$$\frac{1}{R_1} = (\frac{d\theta}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2}) / (1 - \frac{w}{R}) \quad (47)$$

С учетом (45) и (47) изменение кривизны элемента при изгибе будет

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} &= \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) / \left(1 - \frac{w}{R} \right) - \frac{d\theta}{ds} = \\ &= \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) \frac{R}{R-w}.\end{aligned}$$

Пренебрегая в знаменателе величиной перемещения w по сравнению с радиусом R , получим

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2}. \quad (48)$$

Подставляя (48) в (44), в окончательном виде запишем дифференциальное уравнение изгиба кривого бруса, очерченного по дуге окружности:

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} = -\frac{M}{EI}$$

или, переходя к полярным координатам

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{d^2w}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} \right) = \frac{d^2w}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{1}{R^2} \frac{d^2w}{d\theta^2},$$

получаем соотношение

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{MR^2}{EI}, \quad (49)$$

представляющее собой дифференциальное уравнение изгиба кривого бруса при потере устойчивости.

6.2. Устойчивость двухшарнирной арки

В исходном состоянии при действии равномерной сжимающей радиальной нагрузки q сечения арки (рис. 22) испытывают осевое сжатие силой $N = qR$. Как показывают исследования, потеря устойчивости происходит по кососимметричной форме (пунктир на рис. 22). При этом в сечениях арки появляются изгибающие моменты

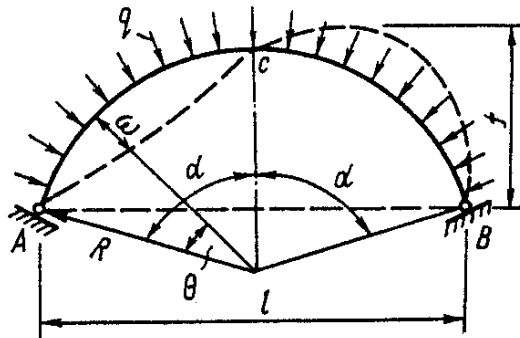


Рис. 22

$$M = Nw = qRw.$$

С учетом этого дифференциальное уравнение (49) принимает такой вид:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = 0, \quad (50)$$

где

$$n^2 = 1 + \frac{qR^3}{EI}. \quad (51)$$

Записывая решение дифференциального уравнения

$$w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta,$$

используем граничные условия:

$$\text{при } \theta = 0 \quad w = 0,$$

$$\text{при } \theta = \alpha \quad w = 0.$$

Из первого условия получаем $C_1 = 0$, а второе приводит к соотношению

$$C_2 \sin n\alpha = 0,$$

откуда при $C_2 \neq 0$ имеем:

$$\sin n\alpha = 0 \text{ или } n\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

Отбрасывая ненулевое решение, соответствующее исходной форме равновесия, берем $n\alpha = \pi$.

Тогда из (51) получаем

$$\frac{\pi^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{qR^3}{EI}.$$

Отсюда находим критическую нагрузку

$$q_{кр} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (52)$$

В частности, для арки, очерченной по полуокружности ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), имеем

$$q_{кр} = 3EI / R^3. \quad (53)$$

6.3. Устойчивость бесшарнирной арки

Бесшарнирная арка (рис. 23,а), как и двухшарнирная, теряет устойчивость по кососимметричной форме. В отличие от двухшарнирной арки здесь в опорных сечениях возникают опорные моменты M_o . Тогда расчетную схему бесшарнирной арки можно представить как двухшарнирную, нагруженную дополнительно моментами M_o (рис. 23,б). Эпюра изгибающих моментов от действия моментов M_o показана на рис. 23,в.

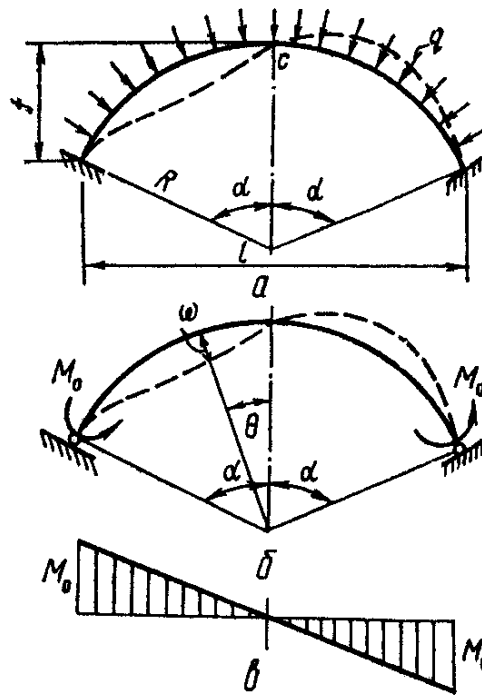


Рис. 23

Тогда дополнительно к моменту от нагрузки q в сечении смежного состояния, отстоящего от вертикали на угол θ , появится момент

$$-M_o \frac{\sin \theta}{\sin \alpha},$$

а полный изгибающий момент будет таким:

$$M = qRw - M_o \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}.$$

Теперь дифференциальное уравнение (49) примет вид

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = C \sin \theta, \quad (54)$$

где $C = \frac{M_o R^2}{EI \sin \alpha}.$

Решение этого уравнения:

$$w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin \theta + \frac{C \sin \theta}{n^2 - 1}.$$

Для определения постоянных C_1 , C_2 и C запишем граничные условия:

при $\theta = 0$ $w = 0$,

при $\theta = \alpha$ $w = 0$,

при $\theta = \alpha$ $\frac{dw}{d\theta} = 0$.

Из первого условия получаем $C_1 = 0$, а из второго и третьего следует:

$$C_2 \sin n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \sin \alpha = 0,$$

$$C_2 \cos n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \cos \alpha = 0.$$

Так как $C_2 \neq 0$, $C \neq 0$, приравниваем нулю определитель системы полученных уравнений:

$$\begin{vmatrix} \sin n\alpha & \frac{\sin \alpha}{n^2 - 1} \\ n \cos n\alpha & \frac{\cos \alpha}{n^2 - 1} \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя приходим к уравнению

$$n \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} n\alpha = 1. \quad (55)$$

Решение уравнения устойчивости (55) дает значение параметра n и, далее, по (51) величину критической нагрузки.

6.4. Устойчивость трехшарнирной арки

Для трехшарнирной арки (рис. 24) рассмотрим две возможные формы потери устойчивости – кососимметричную и симметричную.

При кососимметричной форме изгиб при потере устойчивости происходит так же, как и в двухшарнирной арке. Поэтому соответствующая критическая нагрузка может быть получена по формуле (52).

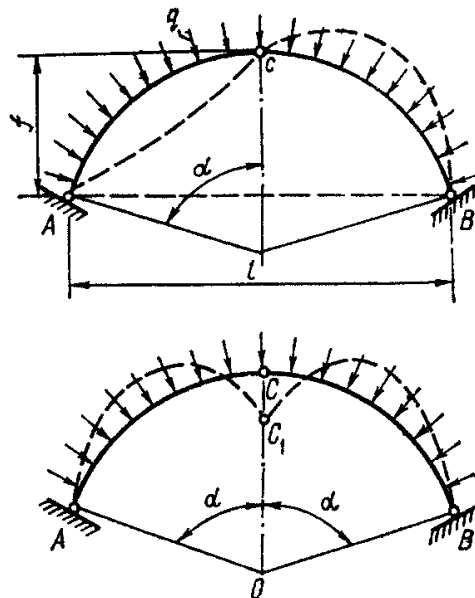


Рис. 24

При симметричной форме потери устойчивости уравнение устойчивости принимает вид

$$4\eta_1(u) = \eta_1(\alpha), \quad (56)$$

где η_1 – функция, используемая для расчета рам на устойчивость методом перемещений, ее значения приведены в табл. 2.

После определения корня u уравнения (56) критическую силу вычисляем по формуле

$$q_{кр} = \frac{EI}{R^3} \frac{4u^2 - \alpha^2}{\alpha^2}. \quad (57)$$

6.5. Устойчивость круговых колец

Круговое кольцо под действием радиальной нагрузки теряет устойчивость, принимая форму, близкую к овальной. Учитывая симметрию, рассмотрим полукольцо (рис. 25). При потере устойчивости в произвольном сечении K кольца появляется изгибающий момент

$$M = M_o - N(w_o - w) = M_o - qR(w_o - w).$$

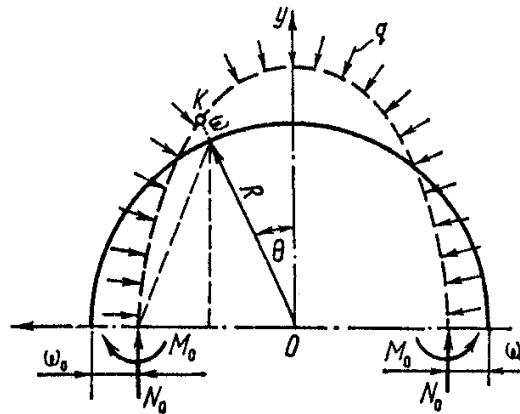


Рис. 25

В этом случае дифференциальное уравнение (49) принимает вид

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{R^2}{EI} (M_o - qRw_o + qRw)$$

или

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = D, \quad (58)$$

где n – обозначение по (51),

а

$$D = -\frac{R^2}{EI} (M_o - qRw_o).$$

Решение уравнения (58):

$$w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin \theta + D/n^2, \quad (59)$$

а первая производная прогиба

$$\frac{dw}{d\theta} = -C_1 n \sin \theta + C_2 n \cos n\theta. \quad (60)$$

Запишем граничные условия задачи:

$$\text{при } \theta = 0 \quad \frac{dw}{d\theta} = 0,$$

$$\text{при } \theta = \pi / 2 \quad \frac{dw}{d\theta} = 0.$$

Из первого условия находим $C_2 = 0$, из второго $C_1 n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$, откуда при условии, что $C_1 \neq 0$, получаем

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0, \text{ т.е. } \frac{n\pi}{2} = 0, \pi, 2\pi \dots$$

Значение критической нагрузки соответствует первому ненулевому корню $\frac{n\pi}{2} = \pi$, откуда $n = 2$.

Теперь из (51) находим критическую нагрузку

$$q_{кр} = 3EI / R^3. \quad (61)$$

Вопросы для самопроверки:

1. Чем характеризуется исходное состояние арок и колец, очерченных по дуге окружности и находящихся под действием радиальной сжимающей нагрузки?
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение изгиба кривого бруса при потере устойчивости?
3. По какой форме теряет устойчивость двухшарнирная арка? Бесшарнирная? Трехшарнирная? Круговое кольцо?

РАЗДЕЛ 4. Динамика стержневых систем

7. Основные понятия

Динамика сооружений занимается исследованием поведения сооружений при динамических воздействиях и разработкой методов их расчета на эти воздействия.

В реальном сооружении динамические нагрузки действуют совместно со статическими. Однако в силу принципа суперпозиции, имеющего место для линейно деформируемых систем, учет статических нагрузок может быть выполнен отдельно. В связи с этим здесь рассматривается расчет только на динамические воздействия при отсутствии статических нагрузок.

При использовании принципа Даламбера сила инерции рассматривается как внешняя нагрузка, приложенная к массам.

7.1. Динамические воздействия

Динамические воздействия могут быть силовыми и кинематическими и приводят к возбуждению колебаний масс сооружения. Динамические воздействия представляют собой переменные по величине или направлению нагрузки – *возмущающие* нагрузки.

Неподвижные периодические нагрузки – это нагрузки, меняющие непрерывно периодически во времени свою величину и направление. Они возникают в основном при наличии неуравновешенных частей механического оборудования. Так, при равномерном вращении ротора, центр масс m которого размещен с эксцентриситетом ρ (рис. 26),

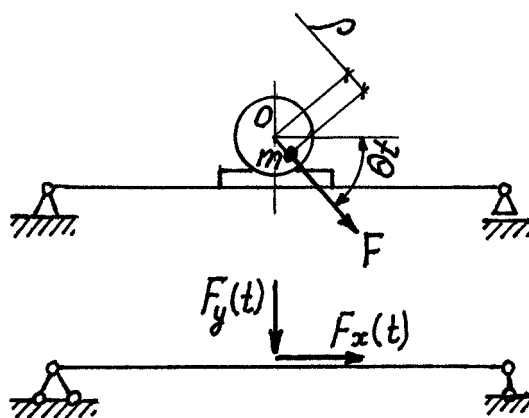


Рис. 26

появляется центробежная сила $F = m\rho\theta^2$ (θ – угловая скорость вращения). Составляющие этой силы

$$F_y(t) = F \sin \theta t, \quad F_x(t) = F \cos \theta t$$

являются гармоническими – изменяются по закону синуса.

Другой вид периодической нагрузки – нагрузки, вызываемые работой машин с кривошипно-шатунными механизмами. График изменения такой нагрузки приведен на рис. 27.

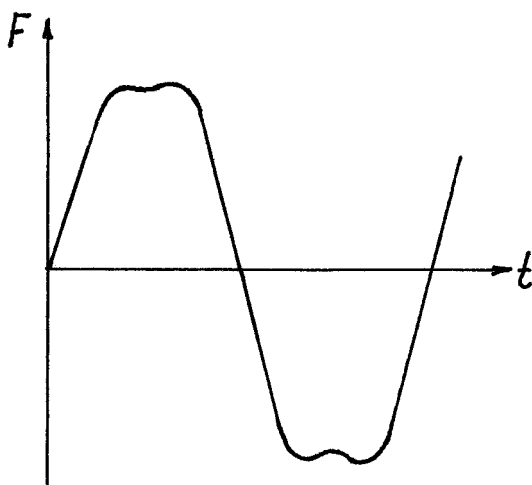


Рис. 27

Импульсные нагрузки вызываются одно- или многократным воздействием в фиксированном месте (падение тела, удар льдин, ударная волна взрыва и др.).

Подвижная нагрузка изменяет свое положение на сооружении. При этом появляются и периодические воздействия за счет неровностей проезжей части, и ударные (поезд на стыках рельсов).

Сейсмическое воздействие является кинематическим и определяется подвижкой основания в результате землетрясения. Закон такого воздействия сложный и связан с изменением ускорений основания (рис. 28).

Ветровая нагрузка вызывается повторяющимися во времени порывами ветра. Такая нагрузка может оказывать значительные воздействия на высотные и большепролетные сооружения.

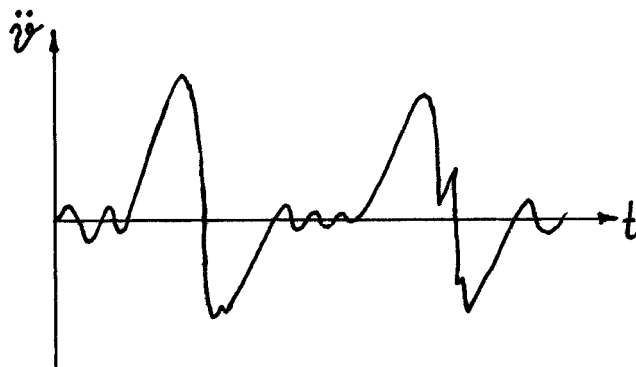


Рис. 28

7.2. Силы, сопровождающие колебания

При колебании сооружения появляются силы, которые обычно учитывают в динамических расчетах.

Силы инерции по Даламберу пропорциональны массе тела и второй производной перемещения – ускорению. Обычно сила инерции направляется в сторону перемещения и берется со знаком минус:

$$I = -m \frac{d^2 v}{dt^2} = -m \ddot{v}. \quad (62)$$

Точки над переменной, как принято, обозначают производную по времени.

Восстанавливающие силы стремятся вернуть тело в первоначальное положение при его отклонении от положения равновесия. Эти силы обычно пропорциональны перемещению.

$$F_c = c \cdot v \quad (63)$$

и направлены в сторону, обратную перемещению.

Здесь c – жесткость сооружения – сила, развиваемая при единичном перемещении массы.

Жесткость является величиной, обратной податливости сооружения:

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (64)$$

где δ_{11} – перемещение массы, вызываемое действием единичной силы – податливость.

Диссипативные силы сопротивления возникают из-за наличия внутреннего трения, трения в шарнирах, сопротивления среды. Силы терния

являются постоянными, а силы сопротивления среды пропорциональны скорости:

$$F_d = k \cdot \dot{v}. \quad (65)$$

Здесь k – коэффициент сопротивления – сила, развиваемая при скорости $\dot{v} = 1$.

Диссипативные силы направляются в сторону, обратную перемещению (скорости).

7.3. Методы динамики сооружений

Для расчета на динамические воздействия применяют три метода: статический, энергетический и кинематический.

Статический метод основан на использовании принципа Даламбера. В соответствии с этим принципом, если в системе кроме заданной нагрузки приложить все силы, сопровождающие колебания, то к ней можно применить условия равновесия. Этот метод широко применяется в простых задачах динамики.

Энергетический метод основывается на принципе сохранения энергии:

$$T + U = const,$$

где T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия системы.

Принцип стационарности приводит к уравнениям Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial v} = 0,$$

где v – обобщенная координата (обобщенное перемещение), определяющая положение массы в процессе колебаний.

Кинематический метод основан на использовании принципа возможных перемещений и принципа Даламбера. Он применяется, как и при статическом расчете, но с учетом всех сил, сопровождающих колебания.

7.4. Степени свободы динамической системы

В кинематическом анализе сооружений и в расчетах на устойчивость степени свободы определяются исходя из возможности перемещений всех точек системы. В динамике под числом степеней свободы понимают количество независимых перемещений *масс* системы. Так, стержень с *распределенной массой* (рис. 29,а) имеет $W = \infty$, поскольку каждая его точка обладает массой, а количество этих точек бесконечно.

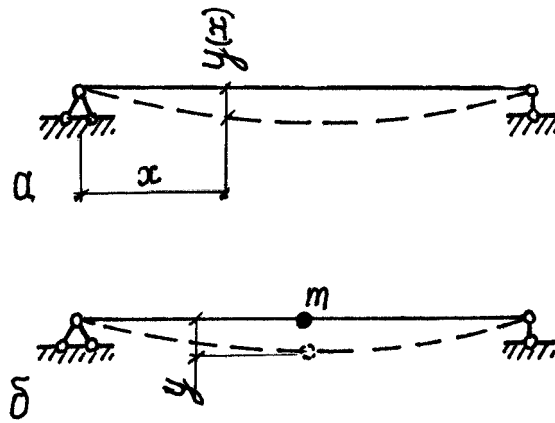


Рис. 29

Если массой стержня по сравнению с массой m , сосредоточенной в одной точке, можно пренебречь и не учитывать продольные деформации (рис. 29,б), положение массы m будет определяться лишь ее вертикальным перемещением y . Следовательно, $W = 1$.

В общем случае система с одной *точечной массой* (рис. 30) имеет две степени свободы.

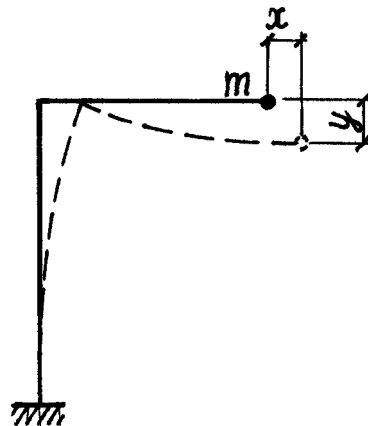


Рис. 30

Если поворотами массы нельзя пренебрегать, то система с одной такой *сосредоточенной массой* (рис. 31) в общем случае имеет три степени свободы: два линейных смещения и поворот.

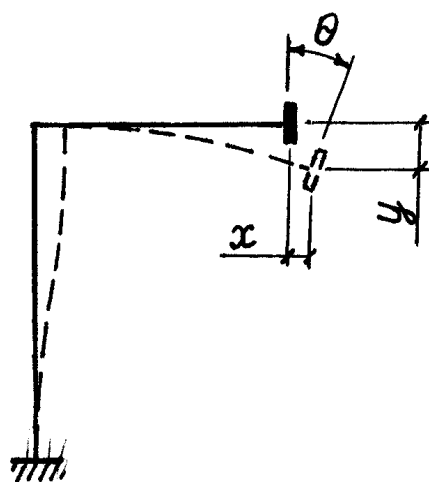


Рис. 31

Вопросы для самопроверки:

1. Перечислите виды динамических воздействий.
2. Какая нагрузка называется гармонической?
3. Какие силы появляются при колебаниях? Приведите их выражения через обобщенные перемещения.
4. Какие методы применяют при расчете на динамические воздействия? На чем основан каждый из этих методов?
5. Что понимают под числом степеней свободы в динамике? Приведите примеры определения W .

8. Свободные колебания систем с одной степенью свободы

8.1. Дифференциальное уравнение движения

Рассмотрим невесомую балку с одной точечной массой m (рис. 32,а). К балке приложена возмущающая сила $F(t)$ и действует сила тяжести mg (g – ускорение свободного падения). Сила тяжести постоянна, расчет на ее действие не вызывает труда, поэтому дальше будем рассматривать только действие возмущающей нагрузки.

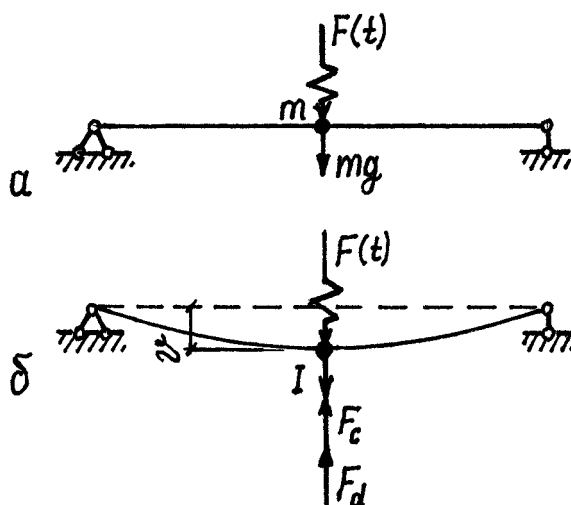


Рис. 32

В произвольном состоянии перемещение колеблющейся массы от исходного положения равновесия составляет v . При этом на массу действуют: сила инерции I , сила упругого сопротивления балки F_c и сила сопротивления среды F_d (рис. 32,б).

Используя принцип Даламбера, запишем условие равновесия:

$$\Sigma y = 0; \quad F(t) + I - F_c - F_d = 0.$$

Выражая силы через перемещение с помощью (62), (63), (65), преобразуем это уравнение:

$$m\ddot{v} + cv + k\dot{v} = F(t).$$

В полученном уравнении выделим вторую производную перемещения делением всех слагаемых на m :

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v + \frac{k}{m}\dot{v} = \frac{F(t)}{m}. \quad (66)$$

Дифференциальное уравнение (66) движения системы с одной степенью свободы получено для случая, когда все силы, сопровождающие

колебания, приложены непосредственно к массе. В других случаях уравнения могут отличаться лишь постоянными коэффициентами и обозначением перемещения. Для общности рассуждений далее введем понятие *обобщенного перемещения*, или *обобщенной координаты*, которую будем обозначать v .

8.2. Свободные колебания без сопротивления

Рассмотрим консервативную систему (напомним, для нее $F_d = 0$). Выведем систему из положения равновесия и отпустим. Тогда при ее колебаниях $F(t) = 0$. Такие колебания, происходящие при отсутствии возмущающей нагрузки, называются *свободными* или *собственными колебаниями*.

Уравнение движения (66) для свободных колебаний примет такой вид:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v = 0.$$

Введя обозначение

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (67)$$

приходим к стандартному однородному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (68)$$

Решение этого уравнения

$$v = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

преобразуем, введя вместо A_1 и A_2 новые постоянные A и λ так, что

$$A_1 = A \sin \lambda, \quad A_2 = A \cos \lambda.$$

Тогда получаем

$$v = A \cos \omega t \sin \lambda + A \sin \omega t \cos \lambda$$

или

$$v = A \sin(\omega t + \lambda). \quad (69)$$

Таким образом, колебания массы происходят по синусоиде (рис. 33) и называются *гармоническими*. Наибольшее перемещение $v = A$ называется *амплитудой* колебаний, а величина λ , определяющая положение массы в момент начала колебаний, – *начальной фазой* колебаний.

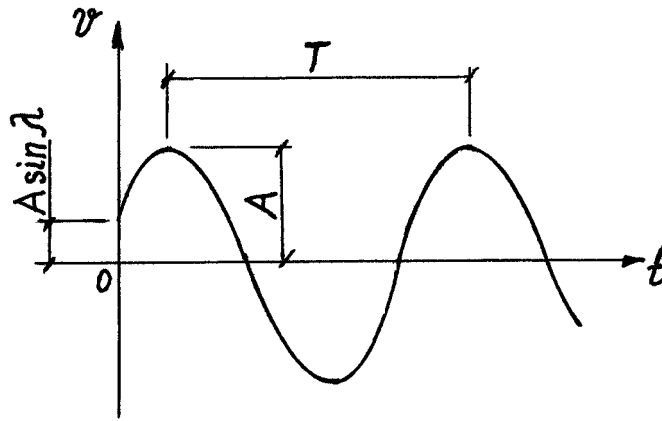


Рис. 33

Рассмотрим начальные условия. Пусть при $t = 0$ $v = v_0$ и $\dot{v} = \dot{v}_0$.
С учетом (69) получаем

$$\begin{aligned} v_0 &= A \sin \lambda, \\ \dot{v}_0 &= A \omega \cos \lambda. \end{aligned} \quad (70)$$

Разделив почленно первое уравнение (70) на второе, находим начальную фазу колебаний:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\omega v_0}{\dot{v}_0}. \quad (71)$$

Далее, разделив предварительно члены второго уравнения (70) на ω , возведем в квадрат обе части первого и второго уравнений и сложим их почленно:

$$v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega} \right)^2 = A^2 \sin^2 \lambda + A^2 \cos^2 \lambda.$$

Отсюда находим амплитуду колебаний:

$$A = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega} \right)^2}. \quad (72)$$

Период колебаний T – это время, за которое совершается один полный цикл колебаний. При изменении времени на величину T значение $\sin(\omega t + \lambda)$ повторяется, т.е.

$$\omega t + \lambda + 2\pi = \omega(t + T) + \lambda.$$

Отсюда находим

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (73)$$

и

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (74)$$

Таким образом, ω представляет собой количество циклов колебаний, совершаемых за 2π секунд, называется *круговой частотой свободных колебаний* и измеряется в рад/с или с^{-1} . В технике часто применяют иную величину:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}, \quad (75)$$

называемую технической частотой. Она представляет собой число циклов колебаний, совершаемых в секунду, и измеряется в герцах (Гц).

По обозначению (67) с учетом (64) находим

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (76)$$

Заменим массу через развиваемую нею силой G :

$$m = \frac{G}{g}.$$

Учитывая, что произведение силы G на единичное перемещение

$$G \times \delta_{11} = v_{cm}$$

представляет собой перемещение, вызываемое статическим действием массы – статическое перемещение, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{v_{cm}}}. \quad (77)$$

Анализируя (76), приходим к следующим выводам:

- частота ω и период T свободных колебаний не зависят от начальных условий, поэтому ω называют также *собственной частотой*;
- частота уменьшается при увеличении массы и при уменьшении жесткости системы.

Дифференцируя выражение (69) по времени, находим скорость

$$\dot{v} = A\omega \cos(\omega t + \lambda). \quad (78)$$

Отсюда следует, что скорость также изменяется по гармоническому закону, но опережает изменение перемещения на величину $\pi/2$, т.е. на четверть периода.

Дифференцируя (78) еще раз, получаем ускорение

$$\ddot{v} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \lambda). \quad (79)$$

Таким образом, ускорение также изменяется по гармоническому закону в противофазе с перемещением.

8.3. Свободные колебания с сопротивлением

В реальных условиях колебания всегда происходят при наличии сил сопротивления F_d . Будем полагать, что эти силы пропорциональны скорости \dot{v} (65).

Тогда уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы принимает такой вид:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v + \frac{k}{m}\dot{v} = 0. \quad (80)$$

Введя обозначение $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, а также $n = \frac{k}{2m}$, приходим к уравнению

$$\ddot{v} + 2n\dot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (82)$$

На практике, как правило, имеет место соотношение $n < \omega$. В этом случае решение уравнения (82) имеет вид

$$v = e^{-nt} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t). \quad (83)$$

Здесь $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$. (84)

Выражение (83) можно записать в иной форме:

$$v = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \lambda), \quad (85)$$

где A и λ выражаются через A_1 и A_2 так:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \lambda = \arctg \frac{A_1}{A_2}.$$

График колебаний (85) приведен на рис. 34. Штриховые линии показывают закон изменения амплитуд колебаний $v = \pm Ae^{-nt}$.

Как видно из рис. 34 и зависимости (85), колебания являются затухающими, т.е. их амплитуда с течением времени стремится к нулю. Амплитудные значения перемещений достигаются при этом через равные отрезки времени T_1 . Поэтому такие колебания называют условно периодическими, принимая период $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Число колебаний, совершаемых

за 2π секунд $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, как и при гармонических колебаниях, называют круговой частотой затухающих колебаний.

Найдем отношение двух последовательно достигаемых амплитуд A_i и A_{i+1} , соответствующих моментам времени t_i и t_{i+1} :

$$\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-nt_i} \sin(\omega_1 t_i + \lambda)}{Ae^{-nt_{i+1}} \sin(\omega_1 t_{i+1} + \lambda)} = e^{nT_1}. \quad (86)$$

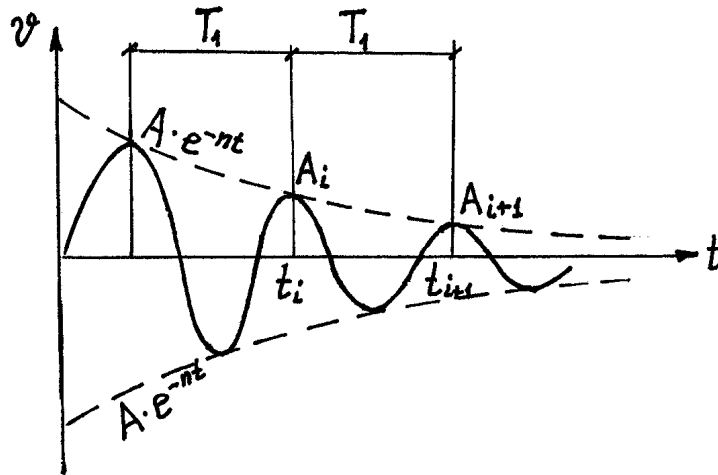


Рис. 34

Это отношение характеризует скорость затухания колебаний и называется *декрементом затуханий*. На практике чаще применяют натуральный логарифм соотношения амплитуд

$$\delta = \ln\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) = nT_1 = \frac{2\pi n}{\omega_1}, \quad (87)$$

называемый *логарифмическим декрементом колебаний*.

Как следует из (84) и (87), даже значительное сопротивление мало влияет на частоту колебаний. Например, при $\delta = 2,06$ амплитуда за один цикл убывает в 7,85 раза, а частота ω_1 меньше собственной частоты ω лишь на 5%. В связи с этим в практических расчетах с сопротивлением обычно принимают $\omega_1 \approx \omega$.

Вопросы для самопроверки:

11. Как получают дифференциальное уравнение движения?
12. Что такое свободные или собственные колебания?
13. Почему свободные колебания без сопротивления называют гармоническими?
14. Что такое амплитуда и начальная фаза колебаний?
15. Что называется периодом колебаний?
16. Что такое круговая частота свободных колебаний или собственная частота?
17. Что такое техническая частота?
18. Как зависит собственная частота от массы и жесткости системы?
19. Почему свободные колебания с сопротивлением называют условно периодическими?
20. Что такое декремент колебаний? Логарифмический декремент?
21. Как влияет учет сил сопротивления на изменение собственной частоты?

9. Свободные колебания систем с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим систему с двумя степенями свободы (рис. 35) при отсутствии диссипативных сил сопротивления и возмущающей нагрузки. Силы инерции, сопровождающие эти – свободные колебания системы, «вызывают» перемещения масс.

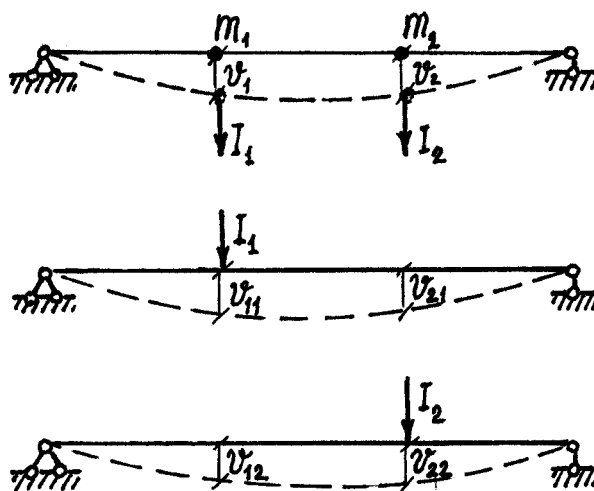


Рис. 35

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{11} + v_{12}, \\ v_2 &= v_{21} + v_{22}. \end{aligned} \tag{88}$$
$$\begin{aligned} v_{11} &= \delta_{11} \cdot I_1, & v_{12} &= \delta_{12} \cdot I_2, \\ v_{21} &= \delta_{21} \cdot I_1, & v_{22} &= \delta_{22} \cdot I_2, \end{aligned}$$
$$v_1 = -\delta_{1,1}m_1\ddot{v}_1 - \delta_{1,2}m_2\ddot{v}_2,$$

$$v_1 = -\delta_{11}m_1\ddot{v}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{v}_2 - \dots - \delta_{1n}m_n\ddot{v}_n, \quad (89)$$

.....

$$v_i = A_i \cdot \sin(\omega t + \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (90)$$

$$\begin{aligned} (m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2})A_1 + m_2\delta_{12}A_2 + \dots + m_n\delta_{1n}A_n &= 0, \\ m_1\delta_{21}A_1 + (m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2})A_2 + \dots + m_n\delta_{2n}A_n &= 0, \end{aligned} \quad (92)$$

73

Так как $A_i \neq 0$, решение полученной системы находим из условия равенства нулю определителя системы уравнений (92):

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}) & m_2\delta_{12} & \dots m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}) & \dots m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots (m_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0. \quad (93)$$

Раскрывая определитель, получаем *уравнение частот* или *вековое уравнение*. Оно является уравнением степени n относительно $\frac{1}{\omega^2}$. Все n корней уравнения – вещественные положительные числа, каждому из которых соответствует свое значение частоты. Количество частот равно числу степеней свободы системы.

Частотам дают числовой индекс в порядке возрастания

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_n. \quad (94)$$

Этот ряд (94) называют *спектром частот*. Наименьшая из них – ω_1 называется *основной* или *частотой основного тона колебаний*. Остальные частоты называют *гармониками*.

Для каждой частоты ω_j можно записать решение дифференциальных уравнений (89) в виде

$$v_{ij} = A_{ij} \sin(\omega_j t + \lambda_j). \quad (95)$$

Это уравнение определяет j -е главное колебание системы с частотой ω_j и начальной фазой λ_j и может быть записано для каждой координаты v_i . Т.е., если система совершает одно из главных колебаний, все массы движутся с одной частотой и начальной фазой. Такие колебания в балке сопровождаются так называемыми стоячими волнами, определяющими ее конфигурацию.

Решения (95), соответствующие собственным частотам, являются частными решениями. Поскольку уравнения линейны, *общее решение* можно получить, применяя принцип суперпозиции:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{1n} \sin(\omega_n t + \lambda_n), \\ v_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{2n} \sin(\omega_n t + \lambda_n), \\ &\dots \end{aligned}$$

Главные колебания можно получить лишь при специально подобранных начальных условиях, а в общем случае колебания являются комбинацией главных колебаний и имеют сложный характер.

В соответствии с (95) отношение перемещений при главных колебаниях в процессе движения остается постоянным и равным отношению амплитуд. Это отношение амплитуд для j -й собственной частоты

$$A_{1j} : A_{2j} : \dots : A_{nj} \quad (96)$$

называют j -й собственной формой. Разделив этот ряд на амплитуду первого перемещения, получаем иную запись j -й собственной формы:

$$\mu_{1j} : \mu_{2j} : \dots : \mu_{nj}, \quad (97)$$

где

$$\mu_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{1j}} \quad (98)$$

– коэффициенты j -й собственной формы колебаний. Отметим, что $\mu_{1j} = 1$.

По аналогии с частотами первая форма колебаний, соответствующая основной частоте, называется *основной*.

Покажем важное свойство собственных форм – их ортогональность. Силы инерции, соответствующие перемещениям масс, определяются выражением (62) и для j -го главного колебания будут такими:

$$I_{ij} = -m_i \ddot{v}_{ij} = m_i A_{ij} \omega_j^2 \sin(\omega_j t + \lambda_j), \quad (99)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично для k -го главного колебания

$$I_{ik} = -m_i \ddot{v}_{ik} = m_i A_{ik} \omega_k^2 \sin(\omega_k t + \lambda_k), \quad (100)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Под действием сил инерции и сил упругости система при главных колебаниях в каждый момент времени находится «в равновесии». Поэтому перемещения v_{ij} и v_{ik} можно рассматривать как статические перемещения от сил инерции, соответственно I_{ij} и I_{ik} . Тогда, применяя теорему о взаимности работ Бетти, можно записать

$$\sum_{i=1}^n I_{ij} v_{ik} = \sum_{i=1}^n I_{ik} v_{ij}$$

Или после подстановки (99) и (100) и сокращения на тригонометрические функции:

$$\omega_j^2 \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = \omega_k^2 \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik}.$$

Отсюда получаем

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2) \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0.$$

Если собственные частоты различны, то $(\omega_j^2 - \omega_k^2) \neq 0$, следовательно

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0. \quad (101)$$

Полученное соотношение и выражает свойство ортогональности собственных форм, соответствующих двум разным частотам.

В развернутом виде оно выглядит так:

$$m_1 A_{1j} A_{1k} + m_2 A_{2j} A_{2k} + \dots + m_n A_{nj} A_{nk} = 0. \quad (102)$$

Если все члены этого уравнения разделить на произведение $A_{1j} A_{1k}$, получим условие ортогональности в другом виде:

$$m_1 + m_2 \mu_{2j} \mu_{2k} + m_3 \mu_{3j} \mu_{3k} + \dots + m_n \mu_{nj} \mu_{nk} = 0. \quad (103)$$

Вопросы для самопроверки:

1. Как получают уравнение частот?
2. Сколько решений дает уравнение частот?
3. Что такое спектр частот?
4. Что такое основная частота или частота основного тона?
5. Что такое главное колебание? При каких условиях его можно получить?
6. Что такое собственная форма колебаний?
7. Какая форма колебаний называется основной?
8. Каким свойством обладают собственные формы колебаний?

10. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

Вынужденными называются колебания, происходящие под действием возмущающей силы.

10.1. Уравнение движения. Частные случаи возмущающей нагрузки

При отсутствии сопротивления уравнение (66) для случая вынужденных колебаний принимает вид

$$\ddot{v} + \frac{c}{m} v = \frac{F(t)}{m}$$

или с учетом обозначения (67)

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{F(t)}{m}. \quad (104)$$

Решение этого уравнения получается как сумма общего решения однородного уравнения (68) и частного решения неоднородного уравнения:

$$v = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + V(t). \quad (105)$$

Получим решение для некоторых частных случаев загрузки, причем для простоты по-прежнему будем считать, что возмущающая сила $F(t)$ приложена к массе.

Рассмотрим действие силы $F(t)$, внезапно приложенной к массе и затем остающейся постоянной (рис. 36). График этой нагрузки приведен на рис. 37.

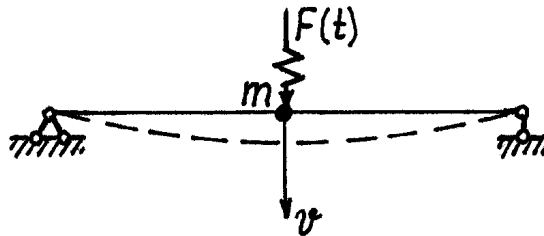


Рис. 36

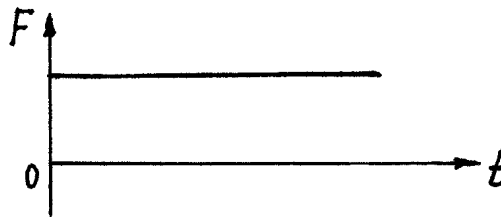


Рис. 37

В качестве частного решения возьмем статический прогиб массы

$$V(t) = v_{cm} = \delta_{11} F.$$

Действительно, уравнение (104) при $v = v_{cm}$ удовлетворяется:

$$\ddot{v}_{cm} + \omega^2 v_{cm} = \frac{F}{m}.$$

Здесь $v_{cm} = \delta_{11} F$, $\ddot{v}_{cm} = 0$, $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$.

Так как до приложения нагрузки система находилась в покое, начальные условия будут такими:

при $t = 0$ $v = 0, \dot{v} = 0$.

Из первого условия находим $A_1 = -v_{cm}$.

Записывая производную решения (105):

$$\dot{v} = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t,$$

по второму начальному условию получаем $A_2 = 0$.

Таким образом, решение (105) для данного случая нагружения принимает вид

$$v = -v_{cm} \cos \omega t + v_{cm} = v_{cm} (1 - \cos \omega t). \quad (106)$$

График этой зависимости приведен на рис. 38. Из этого графика видно, что колебания происходят по гармоническому закону вокруг положения статического равновесия, а их амплитуда составляет $v_{max} = 2v_{cm}$.

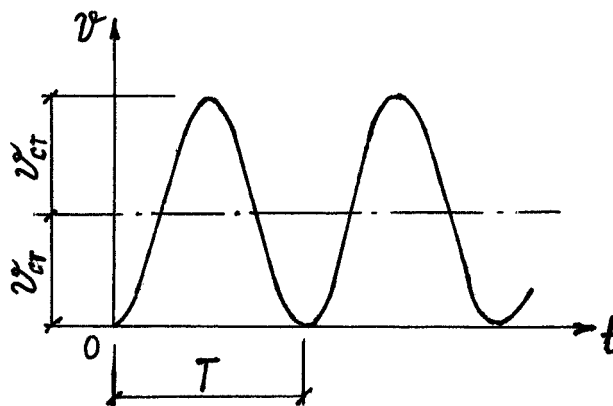


Рис. 38

Рассмотрим случай действия импульсной (ударной) нагрузки (рис. 39).

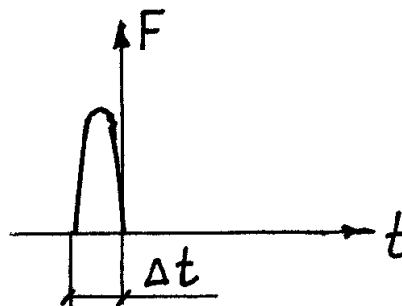


Рис. 39

Форма импульса (закон изменения силы $F(t)$) может быть различной, величина

$$S = \int_{-\Delta t}^0 F(t) dt \quad (107)$$

называется *импульсом силы*. Здесь с учетом малости Δt для удобства считается, что отсчет времени начинается после окончания действия импульса.

В соответствии с теоремой об изменении количества движения

$$m \times \Delta \dot{v} = S. \quad (108)$$

После действия импульса возмущающие нагрузки отсутствуют и система совершает свободные колебания, описываемые соотношением (69). До удара скорость массы была равна нулю: $\dot{v}_0 = 0$, следовательно, приращение скорости $\Delta \dot{v} = \dot{v}_0$, т.е. равно скорости после удара. За время удара перемещение массы практически не изменилось и $v_0 = 0$.

Тогда из (108) следует $\dot{v}_0 = \frac{S}{m}$, из (71) $\lambda = 0$, а из (72) $A = \frac{\dot{v}_0}{\omega} = \frac{S}{m\omega}$. Таким образом, в соответствии с (69), движение системы, вызванное действием импульса, описывается выражением

$$v = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t. \quad (109)$$

Еще раз отметим, что нагрузку можно считать импульсной лишь в том случае, когда время действия нагрузки Δt мало по сравнению с периодом собственных колебаний.

10.2. Вынужденные колебания при действии периодической возмущающей нагрузки

Рассмотрим случай действия возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону

$$F(t) = F \sin \theta t.$$

При отсутствии сопротивления дифференциальное уравнение колебаний принимает вид

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{F}{m} \sin \theta t. \quad (110)$$

Общее решение однородного уравнения соответствует свободным колебаниям

$$v_1 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad (111)$$

а частное решение неоднородного уравнения (110) будем искать в виде

$$v_2 = C \sin \theta t. \quad (112)$$

Подставляя v_2 согласно (112) и его производную $\ddot{v}_2 = -C\theta^2 \sin \theta t$ в (110), получаем

$$-C\theta^2 \sin \theta t + \omega^2 C \sin \theta t = \frac{F}{m} \sin \theta t.$$

Отсюда

$$C = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F}{m\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]}$$

или, с учетом $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$ и $v_{cm} = F\delta_{11}$, имеем

$$C = \frac{Fm\delta_{11}}{m \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]} = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}$$

Теперь можно записать общее решение уравнения (110):

$$v = v_1 + v_2 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t. \quad (113)$$

Таким образом, вынужденные колебания в отличие от свободных не являются гармоническими.

Пусть в начальный момент времени при $t = 0$ $v_0 = 0$ и $\dot{v}_0 = 0$. Тогда из первого условия $A_1 = 0$.

Записывая производную перемещения (скорость)

$$\dot{v} = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t + \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \theta \cos \theta t, \quad (114)$$

из второго условия находим

$$A_2 = -v_{cm} \frac{\theta}{\omega} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \quad (115)$$

Теперь выражение для перемещений (113) принимает такой вид:

$$v = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (116)$$

Таким образом, вынужденные колебания происходят наложением колебаний с собственной частотой ω и колебаний с частотой возмущающей нагрузки θ (рис. 40).

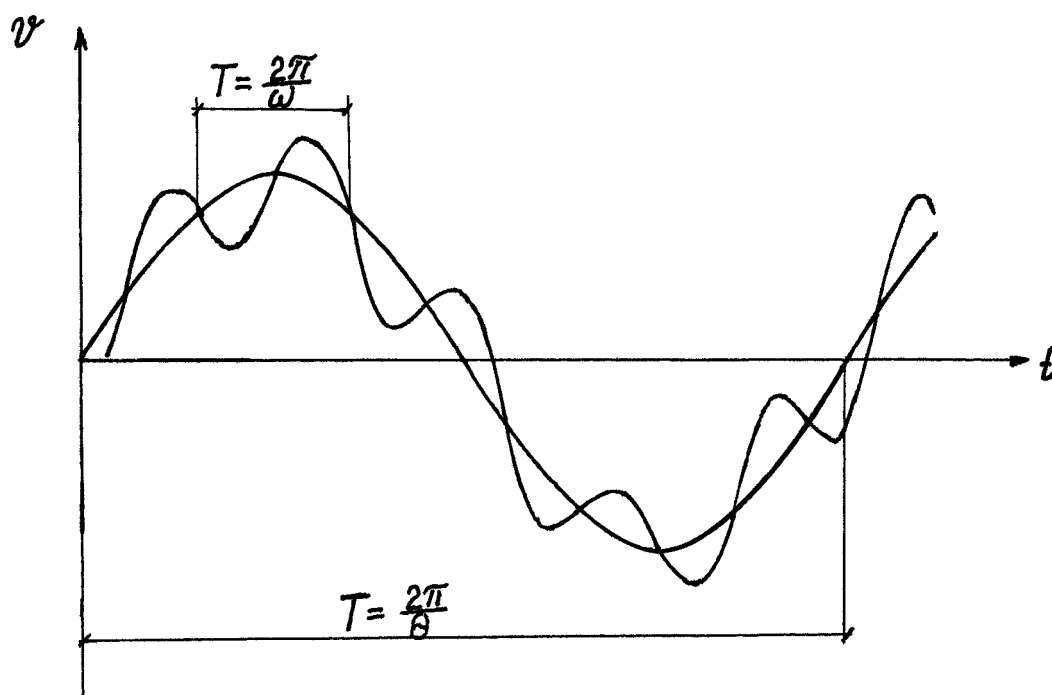


Рис. 40

Второе слагаемое в скобках (116) представляет собой свободные колебания. Поскольку в реальных условиях всегда существуют силы сопротивления, свободные колебания являются затухающими. Поэтому для практических целей их можно не учитывать и принимать

$$v = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t. \quad (117)$$

Амплитуда таких колебаний

$$v_{max} = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (118)$$

При $\frac{\theta}{\omega} \rightarrow 1$ $v_{max} \rightarrow \infty$. Такое явление, когда при совпадении частоты возмущающей нагрузки с частотой собственных колебаний амплитуда возрастает до бесконечности, называется *резонансом*.

10.3. Усилия от динамических воздействий.

Динамический коэффициент

Основной целью динамического расчета является определение усилий, возникающих при колебаниях системы. Один из способов такого расчета, основанный на использовании принципа независимости действия сил, заключается в следующем. После определения ускорения массы \ddot{v} находят силы инерции. Тогда наибольшие усилия от динамической нагрузки можно получить как сумму усилий от статического действия амплитудного значения

возмущающей нагрузки и от действия амплитудной силы инерции. Например, для изгибающих моментов получаем:

$$M_{\partial} = M_{cm} + \overline{M} \times I, \quad (119)$$

где \overline{M} – моменты от единичной силы, приложенной к массе.

Для определения полных усилий к усилиям от динамического воздействия необходимо добавить усилия от силы тяжести массы.

Оценка динамического воздействия может быть выполнена с помощью *динамического коэффициента (коэффициента динамичности)* μ . Этот коэффициент представляет собой отношение максимального значения рассматриваемой величины при динамическом воздействии к значению этой величины при статическом действии соответствующей возмущающей нагрузки.

Отметим, что величина динамического коэффициента в общем случае будет различной при определении его по перемещениям, изгибающим моментам и другим усилиям. Одинаковым значение μ будет только в случае, если возмущающая нагрузка приложена непосредственно к массе. В частности, для рассмотренных выше случаев действия нагрузки получаем: при внезапно приложенной силе (см. п. 10.1)

$$\mu = \frac{v_{max}}{v_{cm}} = 2, \quad (120)$$

при действии гармонической силы (см. п. 10.2)

$$\mu = \frac{v_{max}}{v_{cm}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (121)$$

В последнем случае при приближении к резонансу μ растет до бесконечности, а затем, по мере удаления от него при $\frac{\theta}{\omega} > 1$ падает (рис. 41).

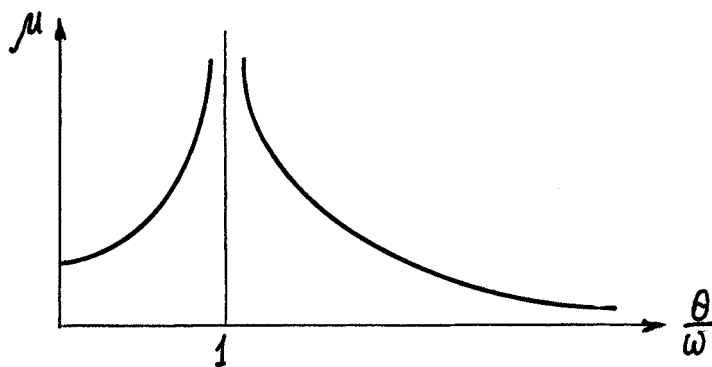


Рис. 41

Отметим, что при учете сил сопротивления динамический коэффициент при $\frac{\theta}{\omega} = 1$ имеет конечное значение. Однако даже при значительном сопротивлении по мере удаления $\frac{\theta}{\omega}$ от единицы величина μ приближается к значению (121), соответствующему отсутствию сопротивления. В связи с этим в практических расчетах, как правило, для определения динамического коэффициента при действии гармонической нагрузки используется выражение (121).

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое вынужденные колебания?
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний?
3. Что называется импульсом силы?
4. Какие колебания совершает система после окончания действия импульса?
5. Какой характер имеют вынужденные колебания при действии гармонической нагрузки?
6. Что такое резонанс? Почему в конструкциях нельзя допускать появления резонанса?
7. Как определяют усилия от возмущающей нагрузки?
8. Что такое динамический коэффициент?

11. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы

11.1. Колебания при действии гармонической нагрузки

При рассмотрении свободных колебаний системы без сопротивления получены выражения (89) для перемещений масс под действием сил инерции в таком виде:

$$v_i(t) = - \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{v}_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При действии на систему возмущающих нагрузок $F_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$ к перемещениям от инерционных сил (правые части уравнений (89)) добавляются перемещения от внешней нагрузки $\Delta_{if}(t)$. Переносим перемещения от сил инерции в левую часть, получаем

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (122)$$

$$D = (\theta^2)^n \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\theta^2} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\theta^2} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} - \frac{1}{\theta^2} \end{vmatrix} \quad (127)$$

с точностью до множителя $(\theta^2)^n$ совпадает с определителем (93) системы уравнений свободных колебаний. Отсюда следует, что при совпадении θ с одной из собственных частот ω_i определитель (127) обращается в ноль и амплитуды перемещений v_i становятся бесконечными – наступает резонанс.

Как и в случае системы с одной степенью свободы, при учете сил сопротивления амплитуды v_i в зоне резонанса не обращаются в бесконечность, но могут достигать больших значений.

Уравнение (126) можно записать в другом виде, если учесть, что

$$I_i(t) = -m_i \ddot{v}_i(t) = m_i \theta^2 v_i(t)$$

и амплитудное значение сил инерции

$$I_i = m_i \theta^2 v_i.$$

Отсюда $v_i = \frac{I_i}{m_i \theta^2}$ и уравнения (126) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}^* I_1 + \delta_{12} I_2 + \dots + \delta_{1n} I_n + \Delta_{1f} &= 0, \\ \delta_{21} I_1 + \delta_{22}^* I_2 + \dots + \delta_{2n} I_n + \Delta_{2f} &= 0, \\ \dots & \\ \delta_{n1} I_1 + \delta_{n2} I_2 + \dots + \delta_{nn}^* I_n + \Delta_{nf} &= 0, \end{aligned} \quad (128)$$

где

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}. \quad (129)$$

Решение уравнений (128) дает значения I_i амплитуд инерционных сил. После их определения значения наибольших динамических усилий нетрудно определить, используя принцип суперпозиции. В частности, для изгибающих моментов действительно соотношение

$$M_\partial = \overline{M}_1 I_1 + \overline{M}_2 I_2 + \dots + \overline{M}_n I_n + M_f, \quad (130)$$

где \overline{M}_i – изгибающие моменты от единичных сил F_i , приложенных к массам; M_f – изгибающий момент от статического действия возмущающей нагрузки.

Для получения окончательных усилий к найденным наибольшим динамическим усилиям необходимо добавить усилия от сил тяжести.

11.2. Общий случай действия возмущающей нагрузки. Разложение по формам свободных колебаний

В общем случае действия возмущающей нагрузки для получения частного решения может быть применен *метод разложения по собственным формам колебаний*. Он используется тогда, когда известны собственные частоты и формы свободных колебаний.

Представим вектор обобщенных перемещений $v(t)$ в виде линейной комбинации собственных векторов μ_k :

$$v(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \mu_k$$

или в развернутом виде

$$v_i(t) = \varphi_1(t) \mu_{i1} + \varphi_2(t) \mu_{i2} + \dots + \varphi_n(t) \mu_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (131)$$

Здесь $\varphi_i(t)$ – некоторые подлежащие определению функции времени;

$$\mu_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{2k} \\ \mu_{3k} \\ \vdots \\ \mu_{nk} \end{pmatrix} \text{ – вектор } k\text{-й собственной формы колебаний (97).}$$

Функции $\varphi_k(t)$ определяют положение масс в любой момент времени, поэтому их можно рассматривать как новые обобщенные координаты, называемые *главными*. Если все эти координаты, кроме одной, например $\varphi_k(t)$, равны нулю, получаем k -ю собственную форму. Действительно,

$$v_i(t) = \varphi_k(t) \mu_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

и

$$v_1 : v_2 : \dots : v_n = \mu_{1k} : \mu_{2k} : \dots : \mu_{nk}.$$

Таким образом, по (131), движение системы представляется в виде линейной комбинации главных перемещений.

Подставляя $v_i(t)$ по (131) в уравнение (122) получаем

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \mu_{ij} + \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \sum_{j=1}^n \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{kj} = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

или

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{kj} + \varphi_j(t) \mu_{kj} \right] = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (132)$$

Последнее соотношение можно представить в матричной форме:

$$\sum_{j=1}^n \left[\ddot{\varphi}_j(t) C \mu_j + \varphi_j(t) E \mu_j \right] = \Delta(t), \quad (133)$$

где

$$C = \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \Delta_{1f}(t) \\ \Delta_{2f}(t) \\ \dots \\ \Delta_{nf}(t) \end{vmatrix} - \text{вектор перемещений масс от возмущающей нагрузки}$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} - \text{единичная матрица размером } n \times n.$$

Как следует из (92), для каждой j -й собственной формы колебаний действительно соотношение

$$\mu_j = \omega_j^2 C \mu_j. \quad (134)$$

Тогда (133) принимает такой вид:

$$\sum_{j=1}^n [\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t)] C \mu_j = \Delta(t)$$

или

$$\sum_{j=1}^n [\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t)] \frac{1}{\omega_j^2} \mu_j = \Delta(t). \quad (135)$$

Домножим обе части (135) скалярно на $M \mu_k$ (M – диагональная матрица масс, элементами главной диагонали которой являются массы, а остальные – нули) и учтем, что вследствие ортогональности форм свободных колебаний в левой части все слагаемые с несовпадающими индексами j и k обратятся в ноль. Тогда приходим к следующей системе уравнений:

$$\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t) = \omega_j^2 b_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (136)$$

где

$$b_j(t) = \frac{\Delta_{1f}(t) m_1 \mu_{1j} + \Delta_{2f}(t) m_2 \mu_{2j} + \dots + \Delta_{nf}(t) m_n \mu_{nj}}{m_1 \mu_{1j}^2 + m_2 \mu_{2j}^2 + \dots + m_n \mu_{nj}^2}. \quad (137)$$

После определения из уравнений (136) главных координат $\varphi_j(t)$ определяем силы инерции

$$I_j(t) = -m_j \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{jk}$$

и, далее, усилия в системе.

11.3. Кинематическое возбуждение колебаний. Расчет на сейсмическое воздействие

Колебания сооружения могут быть вызваны не только изменяющимися во времени нагрузками, но и перемещениями основания. Примерами могут являться колебания, вызванные колебаниями земной коры при землетрясениях, колебания поддрессоренных частей автомобилей при движении по неровной дороге и др.

Рассмотрим колебания здания (рис. 42,а) при землетрясении. Так как вертикальная жесткость здания обычно существенно больше горизонтальной, будем рассматривать поведение здания при горизонтальном перемещении основания $v_0(t)$. Масса перекрытий значительно превышает массу стен, поэтому в качестве расчетной схемы примем невесомую консоль с точечными массами, расположенными в уровне перекрытий и покрытия (рис. 42,б). Жесткость консоли EI принимаем эквивалентной горизонтальной жесткости здания.

Колебания масс происходят при отсутствии возмущающей нагрузки и могут быть описаны уравнениями, аналогичными (89), которые представим в таком виде:

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_{ks}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (138)$$

где

$$v_{ks}(t) = v_0(t) + v_k(t) \quad (139)$$

– полное перемещение k -й массы, определяемое как сумма перемещения основания v_0 и прогиба консоли v_k (рис. 42,в).

Подставляя перемещения (139) в (138), получаем

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} [\ddot{v}_0(t) + \ddot{v}_k(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) + \ddot{v}_0(t) \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (140)$$

Последнее слагаемое здесь можно рассматривать как некоторое перемещение:

$$\Delta_{i0}(t) = \ddot{v}_0(t) \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (141)$$

Теперь уравнения (138) приобретают вид, аналогичный (122):

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) + \Delta_{i0}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (142)$$

и могут быть решены, например, методом разложения по собственным формам колебаний.

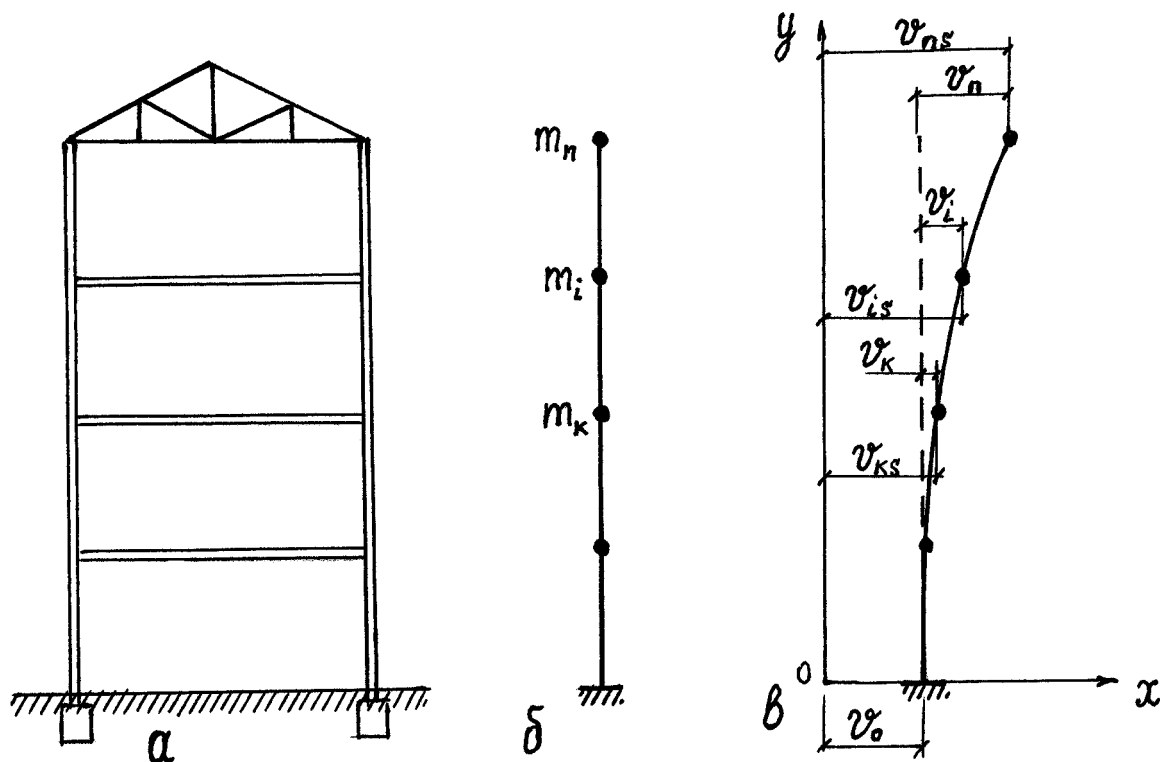


Рис. 42

Вопросы для самопроверки:

1. Какая нагрузка называется гармонической?
2. Как изменяются выражения для перемещений масс при действии возмущающей нагрузки по сравнению с выражениями для свободных колебаний?
3. Как показать, что для систем с конечным числом степеней свободы резонанс наступает при совпадении частоты возмущающей нагрузки с любой из собственных частот системы?
4. К какому виду приводятся уравнения относительно амплитуд инерционных сил при периодической нагрузке?
5. Как определяются усилия от динамического воздействия?
6. Как представляют вектор обобщенных перемещений в методе разложения по собственным формам колебаний?
7. Какую расчетную схему здания принимают при расчете на сейсмические воздействия?
8. Какие уравнения используют для вывода уравнений перемещений масс при сейсмических воздействиях?

Приложение. Расчетно-графические работы

Работа № 1

Расчет рамы на устойчивость методом перемещений

1. Задание и исходные данные

Схема рамы и исходные данные берут по заданию преподавателя в соответствии с рис. 43 и табл. 4.

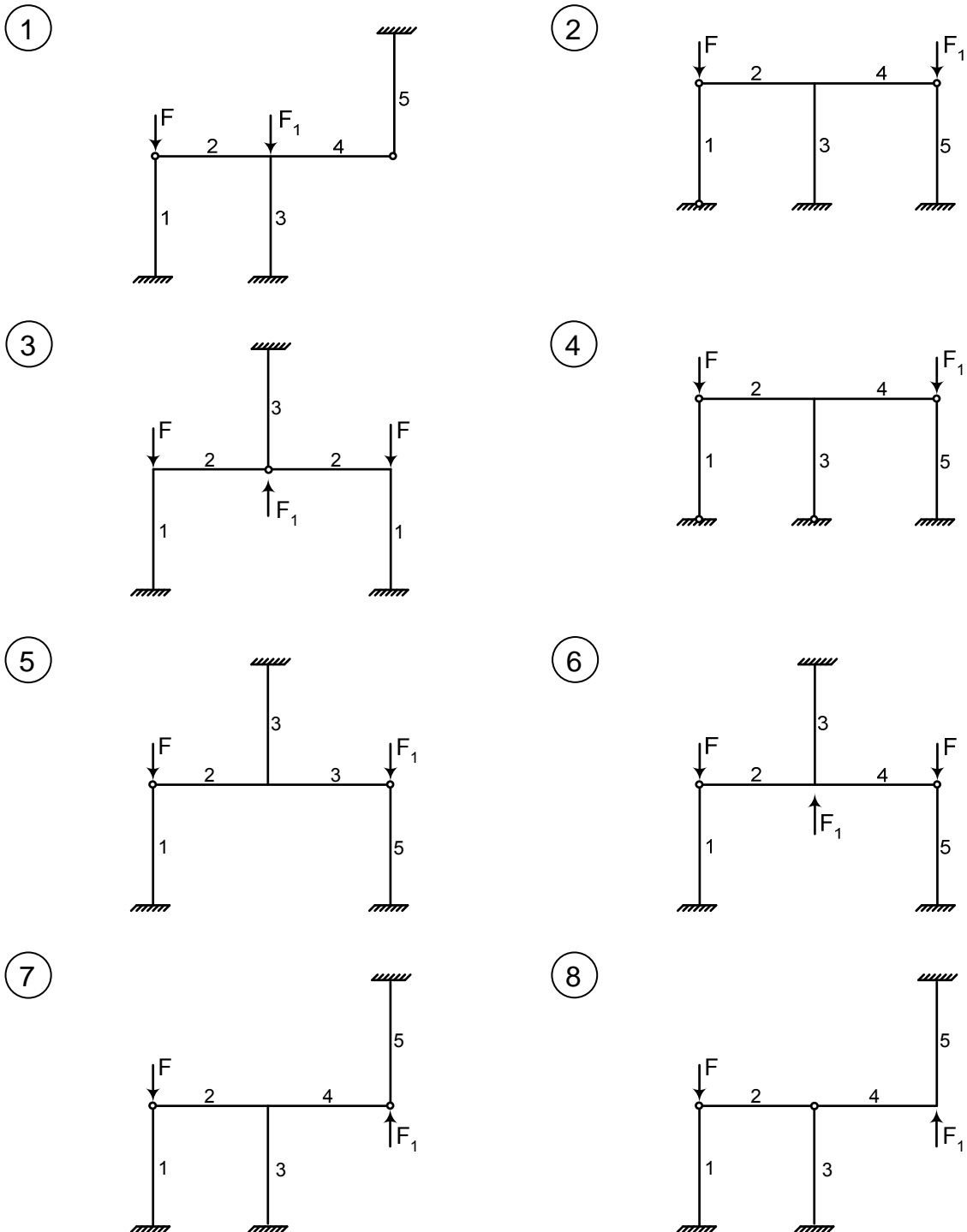
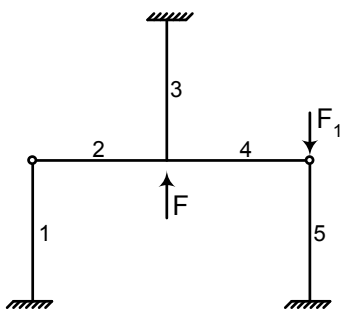
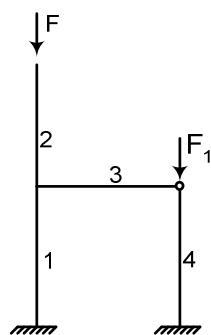


Рис. 43

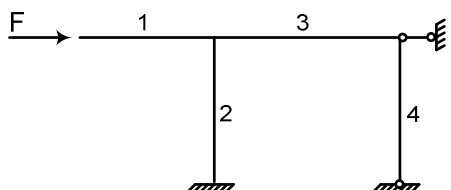
9



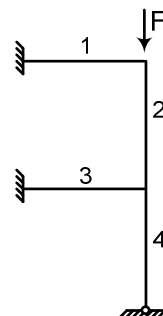
10



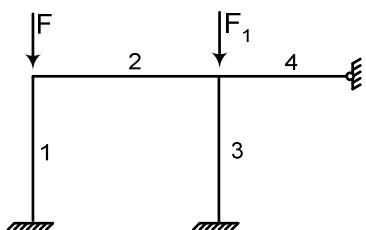
11



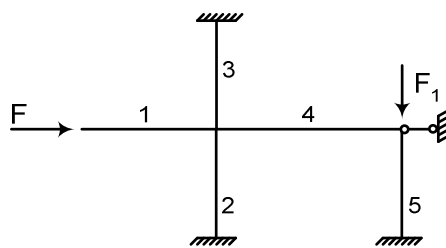
12



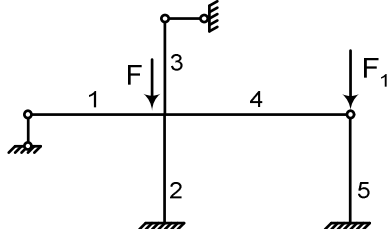
13



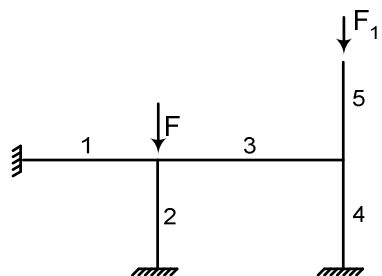
14



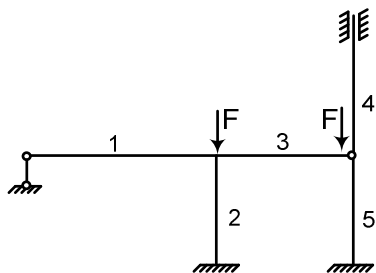
15



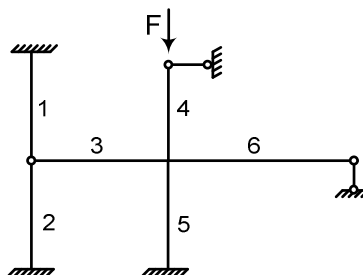
16



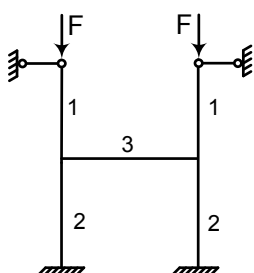
17



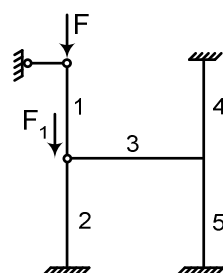
18



19

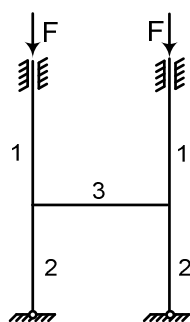


20

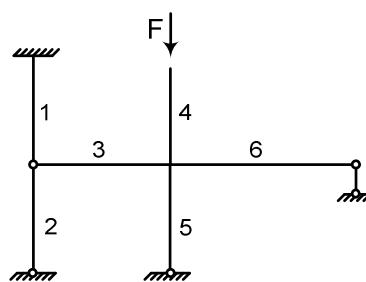


Продолжение рис. 43

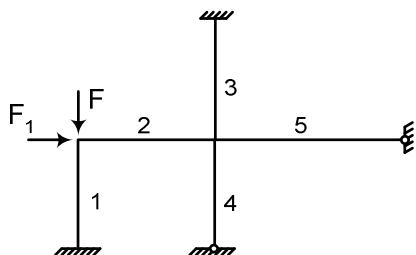
21



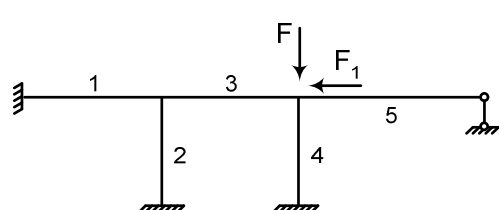
22



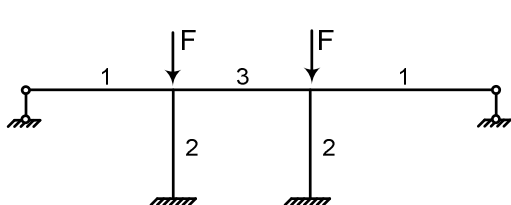
23



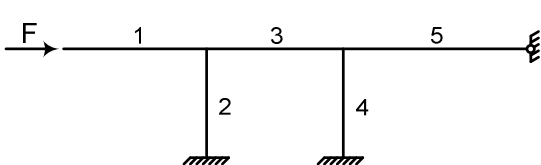
24



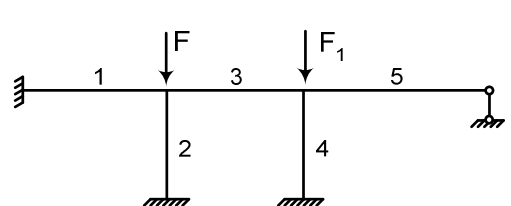
25



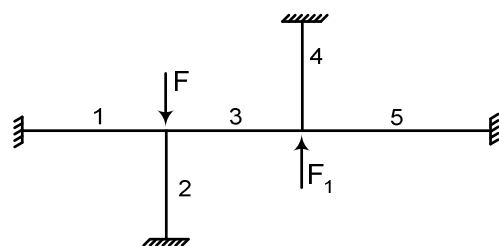
26



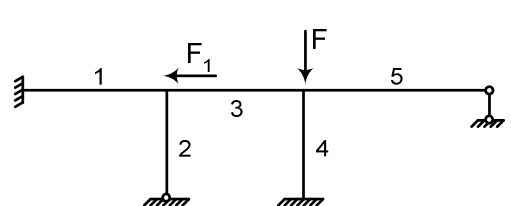
27



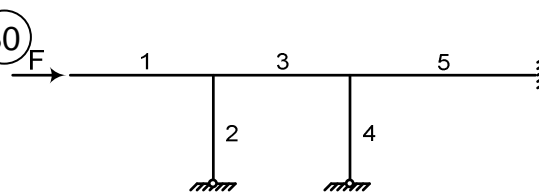
28



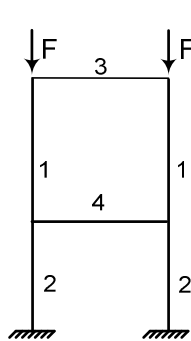
29



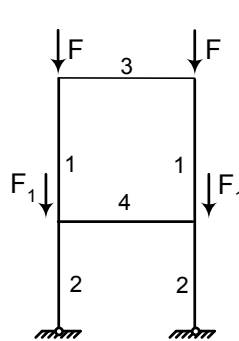
30



31



32



Продолжение рис. 43

Таблица 4

№ п/п	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{l_2}{l_1}$	$\frac{l_3}{l_1}$	$\frac{l_4}{l_1}$	$\frac{l_5}{l_1}$	$\frac{l_6}{l_1}$	$\frac{I_2}{I_1}$	$\frac{I_3}{I_1}$	$\frac{I_4}{I_1}$	$\frac{I_5}{I_1}$	$\frac{I_6}{I_1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,5	2	1	0,5	3	2	0,5	1	2	4	0,5
2	1	4	2	4	1	4	2	0,5	2	1	0,5
3	2	1	3	2	2	0,5	1	2	4	2	0,5
4	4	2	1	4	0,5	1	4	1	8	4	0,5
5	8	4	3	0,5	2	4	8	4	0,5	1	1
6	0,5	1	2	1	3	0,5	10	2	1	2	1
7	1	2	1	2	0,5	1	0,5	1	10	4	1
8	2	4	3	4	1	2	1	4	0,5	1	1
9	4	1	2	0,5	3	4	2	0,5	1	2	2
10	8	2	0,5	1	2	0,5	4	8	1	4	2
11	0,5	4	1	2	0,5	1	8	4	2	1	2
12	1	1	2	4	0,5	2	10	2	2	2	2
13	2	2	3	0,5	1	4	0,5	2	4	4	1
14	4	4	2	1	3	0,5	1	1	4	1	1
15	8	1	0,5	2	3	1	2	0,5	8	2	1
16	0,5	2	1	4	0,5	2	4	4	8	1	1
17	1	4	3	0,5	2	4	8	8	1	2	0,5
18	2	1	0,5	1	2	2	10	2	1	2	0,5

Цель работы – определение критической силы. Для заданной рамы необходимо:

- определить продольные силы в стержнях;
- найти параметры устойчивости стержней, выразив их через какой-либо один;
- найти степень кинематической неопределимости рамы и выбрать основную систему метода перемещений;
- записать канонические уравнения;
- построить эпюры изгибающих моментов в основной системе;
- найти коэффициенты канонических уравнений;
- определить наибольшие значения параметров устойчивости в основной системе;
- с учетом точек разрыва функций параметров устойчивости найти интервал поиска $\nu_{кр}$;
- составить уравнение устойчивости и путем подбора определить его первый корень $\nu_{кр}$;
- определить критическую силу для рамы.

2. Указания к выполнению работы

При определении продольных сил в стержнях следует помнить, что сжимающие силы в расчетах на устойчивость считаются положительными. Продольные силы вычисляются из условий равновесия узлов рамы в исходном состоянии. Изгибающие моменты и поперечные силы при этом отсутствуют.

Параметры устойчивости ν стержней рамы находят по формуле

$$\nu_i = l_i \sqrt{\frac{N_i}{EI_i}}. \quad (143)$$

С учетом заданных соотношений сил, длин стержней и их моментов инерции все параметры устойчивости выражаются через какой-либо один:

$$\nu_i = k_i \nu.$$

Нахождение степени кинематической неопределимости рамы и выбор основной системы выполняют так же, как и при обычном расчете на изгиб.

Для симметричных рам (схемы 3, 19, 21, 25, 31, 32) необходимо показать симметричную и кососимметричную формы потери устойчивости. К расчету принять ту форму, для которой с учетом группировки ненулевыми останутся два неизвестных смещения узлов.

Канонические уравнения в расчете на устойчивость характеризуются отсутствием свободных членов и для рамы с двумя неизвестными имеют вид

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (144)$$

Эпюры изгибающих моментов \overline{M}_i в основной системе строятся от каждого неизвестного $Z_i = 1$ вместе с заданной узловой нагрузкой по табл. 1 с учетом указаний п. 4.3.

Коэффициенты канонических уравнений определяют из условий равновесия узлов (реакции в плавающих заделках) и из условий равновесия рамы (реакции в дополнительных опорных стержнях) так же, как при обычном расчете методом перемещений.

Коэффициенты r_{ik} удобно записать в виде

$$r_{ik} = \frac{EI}{l^n} \bar{r}_{ik},$$

где \bar{r}_{ik} – безразмерная функция параметров устойчивости – масштабированная реакция.

Следует помнить, что реакции должны удовлетворять теореме о взаимности:

$$r_{ik} = r_{ki} \text{ или } \bar{r}_{ik} = \bar{r}_{ki}.$$

Для определения максимально возможных значений параметров устойчивости используем основную систему. По сравнению с заданной рамой основная система усилена постановкой дополнительных связей. Следовательно, критическая сила для нее и, соответственно, параметр устойчивости будут не меньше, чем в заданной раме.

Поскольку в основной системе каждый стержень работает независимо от остальных, критическую силу для нее можно найти как наименьшую из критических сил отдельных стержней. Последние вычисляют по формуле Эйлера:

$$N_{i\text{кр}} = \frac{EI_i}{(\mu_i l_i)^2}. \quad (145)$$

Коэффициент μ зависит от закрепления концов стержня, его значения приведены на рис. 10.

Окончательно для определения интервала поиска параметра устойчивости

$$0 \leq v \leq v_{\max}$$

необходимо по табл. 5 проверить отсутствие точек разрыва функций параметров устойчивости, которые входят в \bar{r}_{ik} . Если такие разрывы есть, интервал необходимо сократить, приняв за v_{\max} значение, соответствующее ближайшей точке разрыва.

Таблица 5

Функция	Значение v в точке разрыва
$\varphi_1(v)$	4,49
$\varphi_5(v)$	1,57
$\eta_1(v)$	4,49

Следует иметь в виду, что во всех случаях v_{\max} не может превышать значение 6,28.

Уравнение устойчивости составляем, раскрывая определитель канонических уравнений. В частности, для дважды кинематически неопределимой рамы

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad (146)$$

Условие $D = 0$ можно заменить эквивалентным условием, используя масштабированные реакции \bar{r}_{ik} :

$$\bar{D} = \bar{r}_{11}\bar{r}_{22} - \bar{r}_{12}^2. \quad (147)$$

Поиск корня $v_{кр}$ этого уравнения ведут путем подбора. При этом значения функций φ_i и η_i берут по табл. 2,3.

Критическую силу находят из обозначения параметра устойчивости

$$N_{кр} = \alpha F_{кр} = \frac{v_{кр}^2 EI}{l^2}, \quad (148)$$

откуда $F_{кр} = \frac{v_{кр}^2 EI}{\alpha l^2}$.

Здесь α – коэффициент при силе F в значении соответствующей продольной силы.

Работу выполняют в виде пояснительной записки на листах формата А4 с титульным листом, на котором ставится соответственно заполненный стандартный штамп. Все записи и расчеты должны быть аккуратными, рисунки выполняют в масштабе.

3. Пример расчета

Определить критическую силу для рамы, приведенной на рис. 44.

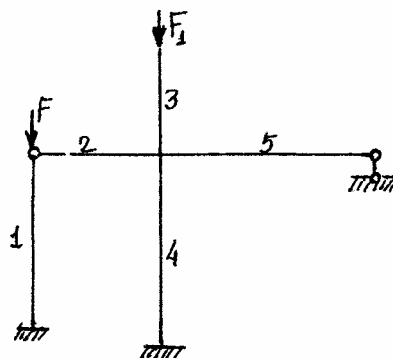


Рис. 44

Исходные данные принять такие:

$$l_2 = 0,7l_1; \quad l_3 = 0,6l_1; \quad l_4 = 1,1l_1; \quad l_5 = 1,2l_1; \\ I_2 = I_1; \quad I_3 = 2I_1; \quad I_4 = 1,5I_1; \quad I_5 = 1,2I_1; \quad F_1 = 0,8F.$$

Решение.

1. Определяем продольные силы в стержнях рамы из условий равновесия узлов. Усилие N_3 определяется непосредственно сжимающей силой на конце стержня 3: $N_3 = F_1$.

Левый узел ригеля (рис. 45,а):

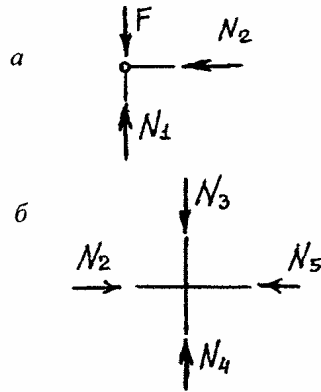


Рис. 45

$$\Sigma x = 0 \Rightarrow N_2 = 0,$$

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow N_1 = F.$$

Средний узел рамы (рис. 45,б):

$$\Sigma x = 0 \Rightarrow N_5 = N_2 = 0,$$

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow N_4 = N_3 = F_1 = 0,8F.$$

Отметим, что усилие N_5 можно определить и непосредственно, проведя сечение через стержень, из равновесия правой части с учетом того, что реакция в правой опоре перпендикулярна оси стержня и не вызывает сжатия.

2. Определяем параметры устойчивости стержней по формуле (143) и выражаем их через v_1 :

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{N_1}{EI_1}}; \quad v_2 = 0;$$

$$v_3 = l_3 \sqrt{\frac{N_3}{EI_3}} = 0,6l_1 \sqrt{\frac{0,8F}{E \cdot 2I_1}} = 0,379v_1;$$

$$v_4 = l_4 \sqrt{\frac{N_4}{EI_4}} = 1,1l_1 \sqrt{\frac{0,8F}{E \cdot 1,5I_1}} = 0,803v_1; \quad v_5 = 0.$$

В случае, если $v_1 = 0$, все параметры необходимо выразить через какой-либо другой – ненулевой параметр устойчивости.

3. Степень кинематической неопределенности находим как сумму угловых и линейных смещений узлов рамы. Число угловых смещений

равно числу жестких узлов $n_y = 1$. Линейные перемещения для всех узлов ригеля возможны в горизонтальном направлении: $n_{\text{л}} = 1$. Следовательно

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2.$$

4. Основную систему выбираем постановкой дополнительных связей в направлении возможных смещений узлов (см. рис. 46).

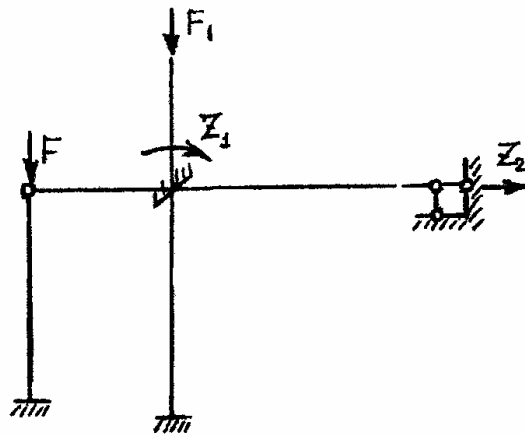


Рис. 46

5. Канонические уравнения для $n = 2$ имеют вид (144).
6. Эюры внутренних усилий (рис. 47) строим, используя табл. 1.

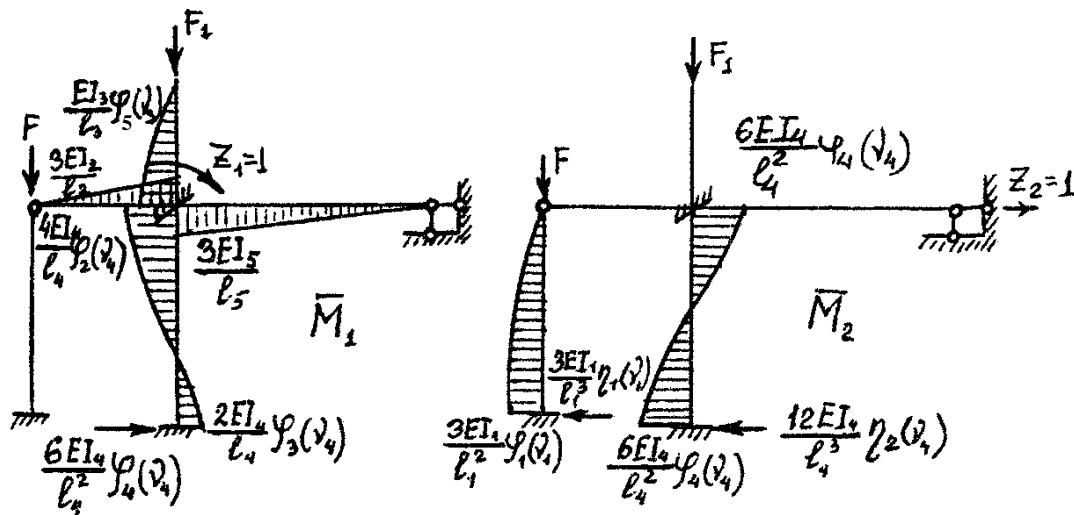


Рис. 47

7. Определяем коэффициенты канонических уравнений. Для этого используем условия равновесия. Узел 1 на эюре \bar{M}_1 (рис. 48,а):

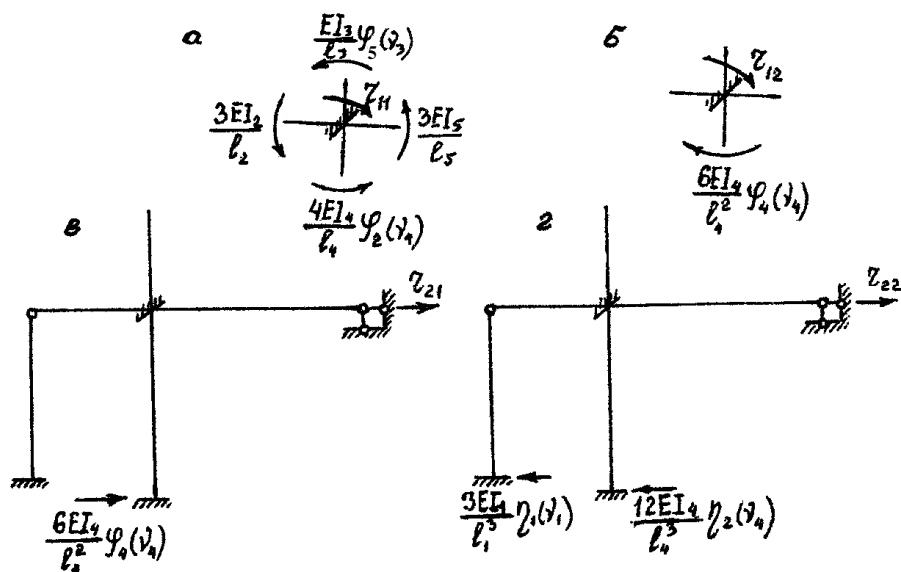


Рис. 48

$$\begin{aligned}
 \Sigma M = 0 \Rightarrow r_{11} &= \frac{3EI_2}{l_2} - \frac{EI_3}{l_3} \varphi_5(v_3) + \frac{3EI_5}{l_5} + \frac{EI_4}{l_4} \varphi_2(v_4) = \\
 &= \frac{3 \cdot EI_1}{0,7l_1} - \frac{E \cdot 2I_1}{0,6l_1} \varphi_5(v_3) + \frac{3E \cdot 1,2I_1}{1,2l_1} + \frac{4E \cdot 1,5I_1}{1,1l_1} \varphi_2(v_4) = \\
 &= \frac{EI_1}{l_1} [5,45 \varphi_2(v_4) - 3,33 \varphi_5(v_3) + 7,29].
 \end{aligned}$$

Узел 1 на эпюре \overline{M}_2 (рис. 48,б):

$$\begin{aligned}
 \Sigma M = 0 \Rightarrow r_{12} &= -\frac{6EI_4}{l_4^2} \varphi_4(v_4) = -\frac{6E \cdot 1,5I_1}{(1,1l_1)^2} \varphi_4(v_4) = \\
 &= \frac{EI_1}{l_1^2} \cdot [-7,44 \varphi_4(v_4)].
 \end{aligned}$$

Рама (рис. 48,в):

$$\Sigma x = 0 \Rightarrow r_{21} = -\frac{6EI_4}{l_4^2} \varphi_4(v_4) = r_{12}.$$

Теорема о взаимности реакций выполнена.

Рама (рис. 48,г):

$$\begin{aligned}
 \Sigma x = 0 \Rightarrow r_{22} &= \frac{3EI_1}{l_1^3} \eta_1(v_1) + \frac{12EI_4}{l_4^3} \eta_2(v_4) = \\
 &= \frac{3EI_1}{l_1^3} \eta_1(v_1) + \frac{12E \cdot 1,5I_1}{(1,1l_1)^3} \eta_2(v_4) = \\
 &= \frac{EI_1}{l_1^3} [3\eta_1(v_1) + 13,53\eta_2(v_4)].
 \end{aligned}$$

Масштабированные реакции:

$$\bar{r}_{11} = 5,45 \varphi_2(v_4) - 3,33 \varphi_5(v_3) + 7,29;$$

$$\bar{r}_{12} = -7,44 \varphi_4(v_4);$$

$$\bar{r}_{22} = 3\eta_1(v_1) + 13,53\eta_2(v_4).$$

8. Определяем максимально возможное значение критической силы для рамы. Для этого находим критическую силу для каждого сжатого стержня основной системы по формуле Эйлера.

Стержень 1, закрепленный на одном конце жестко, на другом – шарнирно:

$$N_{1кр} = F_{кр}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_1 l_1)^2} = \frac{\pi^2 EI_1}{(0,7l_1)^2} = 20,1 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

Стержень 3 консольный:

$$N_{3кр} = 0,8F_{кр}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_3}{(\mu_3 l_3)^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 2I_1}{(2 \cdot 0,6l_1)^2} = 6,85 \frac{EI_1}{l_1^2};$$

$$F_{кр}^{(3)} = \frac{N_{3кр}}{0,8} = \frac{6,85}{0,8} \frac{EI_1}{l_1^2} = 8,57 \frac{EI_1}{l_1^2}$$

Стержень 4 с жестко закрепленными концами:

$$N_{4кр} = 0,8F_{кр}^{(4)} = \frac{\pi^2 EI_4}{(\mu_4 l_4)^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 1,5I_1}{(0,5 \cdot 1,1l_1)^2} = 32,6 \frac{EI_1}{l_1^2};$$

$$F_{кр}^{(4)} = \frac{N_{4кр}}{0,8} = \frac{32,6}{0,8} \frac{EI_1}{l_1^2} = 40,8 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

Критическая сила для усиленной рамы (основной системы) есть наименьшая из сил, найденных для каждого отдельного стержня основной системы:

$$F_{кр}^{oc} = F_{кр}^{(3)} = 8,57 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

Теперь найдем максимально возможное значение параметра устойчивости:

$$v_{1max} = l_1 \sqrt{\frac{F_{кр}^{oc}}{EI_1}} = l_1 \sqrt{\frac{8,57 EI_1}{EI_1 l_1^2}} = 2,93.$$

Этому значению соответствует

$$v_{3max} = 0,379 v_{1max} = 0,379 \cdot 2,93 = 1,11;$$

$$v_{4max} = 0,803 v_{1max} = 0,803 \cdot 2,93 = 2,35.$$

Выясняем, не превышают ли наибольшие значения параметров устойчивости значений, при которых функции, входящие в коэффициенты r_{ik} , имеют разрыв или значения $\max v = 6,28$. По табл. 5

$$\text{для } \varphi_2(v_4) \max v_4 = 6,28 \Rightarrow v_{1max} = \frac{6,28}{0,803} = 7,82;$$

для $\varphi_5(v_3)$ $\max v_3 = 1,57 \Rightarrow v_{1\max} = \frac{1,57}{0,379} = 4,14$;

для $\varphi_4(v_4)$ $\max v_4 = 6,28 \Rightarrow v_{1\max} = \frac{6,28}{0,803} = 7,82$;

для $\eta_1(v_1)$ $\max v_1 = 4,49$;

для $\eta_2(v_4)$ $\max v_4 = 6,28 \Rightarrow v_{1\max} = \frac{6,28}{0,803} = 7,82$.

Все полученные значения $v_{1\max} > 2,93$, поэтому окончательно имеем интервал поиска критического параметра

$$0 \leq v_1 \leq 2,93.$$

9. Путем подбора находим значение критического параметра $v_{1кр}$. Для этого составляем уравнение устойчивости

$$D = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0$$

и с учетом масштабированных реакций получаем

$$\begin{aligned} D &= \frac{EI_1}{l_1} \bar{r}_{11} \times \frac{EI_1}{l_1^3} \bar{r}_{22} - \left(\frac{EI_1}{l_1^2} \bar{r}_{12} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{EI_1}{l_1^2} \right)^2 \left(\bar{r}_{11} \bar{r}_{22} - \bar{r}_{12}^2 \right) = \left(\frac{EI_1}{l_1^2} \right)^2 \bar{D}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{D} = (\bar{r}_{11} \bar{r}_{22} - \bar{r}_{12}^2).$$

Следовательно, условие $D = 0$ можно заменить условием $\bar{D} = 0$.

Поиск корня этого уравнения выполняем в табл. 6. Значения функций φ_i и η_i берем по табл. 2, 3.

Процесс поиска удобно вести с параллельным построением графика функции $\bar{D}(v_1)$. Точка пересечения графика этой функции оси v_1 дает искомое значение $v_{1кр}$.

Разобьем интервал поиска на 3...4 части, вычислим соответствующие значения \bar{D} (строки 1...4 в табл. 6) и по полученным данным построим график $\bar{D}(v_1)$ (рис. 49).

По графику (рис. 49) устанавливаем, что $\bar{D}(v_1) = 0$ при $v_1 \approx 2,3$. Для этого значения вычисляем $\bar{D}(v_1)$ в строке 5 табл. 6. Т.к. $\bar{D}(2,3) = -3,4 < 0$, следующее приближение выбираем меньшим, чем 2,3, например, $v_1 = 2,2$ (строка 6 табл. 6). Следующее приближение берем по линейной интерполяции между $\bar{D}(2,2) = 7,4$ и $\bar{D}(2,3) = -3,4$:

$$v_1 = 2,2 + (2,3 - 2,2) \frac{7,4}{7,4 + 3,4} = 2,27.$$

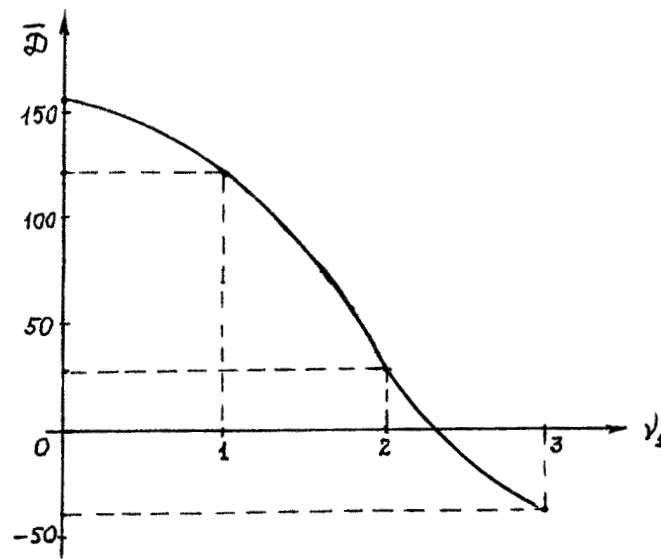


Рис. 49

Проверим отклонение полученного значения $v_1 = 2,27$ от ближайшего, просчитанного в табл. 6:

$$\frac{2,3 - 2,27}{2,3} \times 100\% = 1,3\% < 2,5\%.$$

Поскольку отклонение не превышает 2,5%, значение 2,27 можно считать корнем уравнения $\bar{D}(v_1) = 0$, т.е. $v_{1кр} = 2,27$.

10. Вычисляем критическую силу по формуле (148):

$$N_{1кр} = F_{кр} = \frac{v_{1кр}^2 EI_1}{l_1^2} = \frac{2,27^2 EI_1}{l_1^2} = 5,15 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

Это значение действительно не превышает критической силы для основной системы:

$$5,15 \frac{EI_1}{l_1^2} < 8,57 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

Таблица 6 – Вычисление функции $\bar{D}(v_1)$

№ п/п	v_1	v_3	v_4	$\varphi_2(v_4)$	$\varphi_5(v_3)$	$\varphi_4(v_4)$	$\eta_1(v_1)$	$\eta_2(v_4)$	\bar{r}_{11}	\bar{r}_{12}	\bar{r}_{22}	\bar{D}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	0	0	1	0	1	1	1	12,74	-7,44	16,52	155,1
2	1	0,379	0,803	0,978	0,151	0,989	0,598	0,936	12,12	-7,36	14,45	121,0
3	2	0,758	1,606	0,911	0,718	0,956	-0,637	0,743	9,86	-7,11	8,13	29,6
4	3	1,14	2,41	0,790	2,48	0,899	-1,453	0,415	3,34	-6,69	1,25	-40,6
5	2,3	0,873	1,85	0,880	1,04	0,942	-1,186	0,656	8,62	-7,01	5,31	-3,4
6	2,2	0,834	1,77	0,891	0,919	0,947	-0,993	0,685	9,09	-7,05	6,28	7,4

Работа № 2.

Расчет рам на динамическую нагрузку

1. Задание и исходные данные

Исходные данные для выполнения работы берут из табл. 7 и рис. 50 в соответствии с заданием преподавателя.

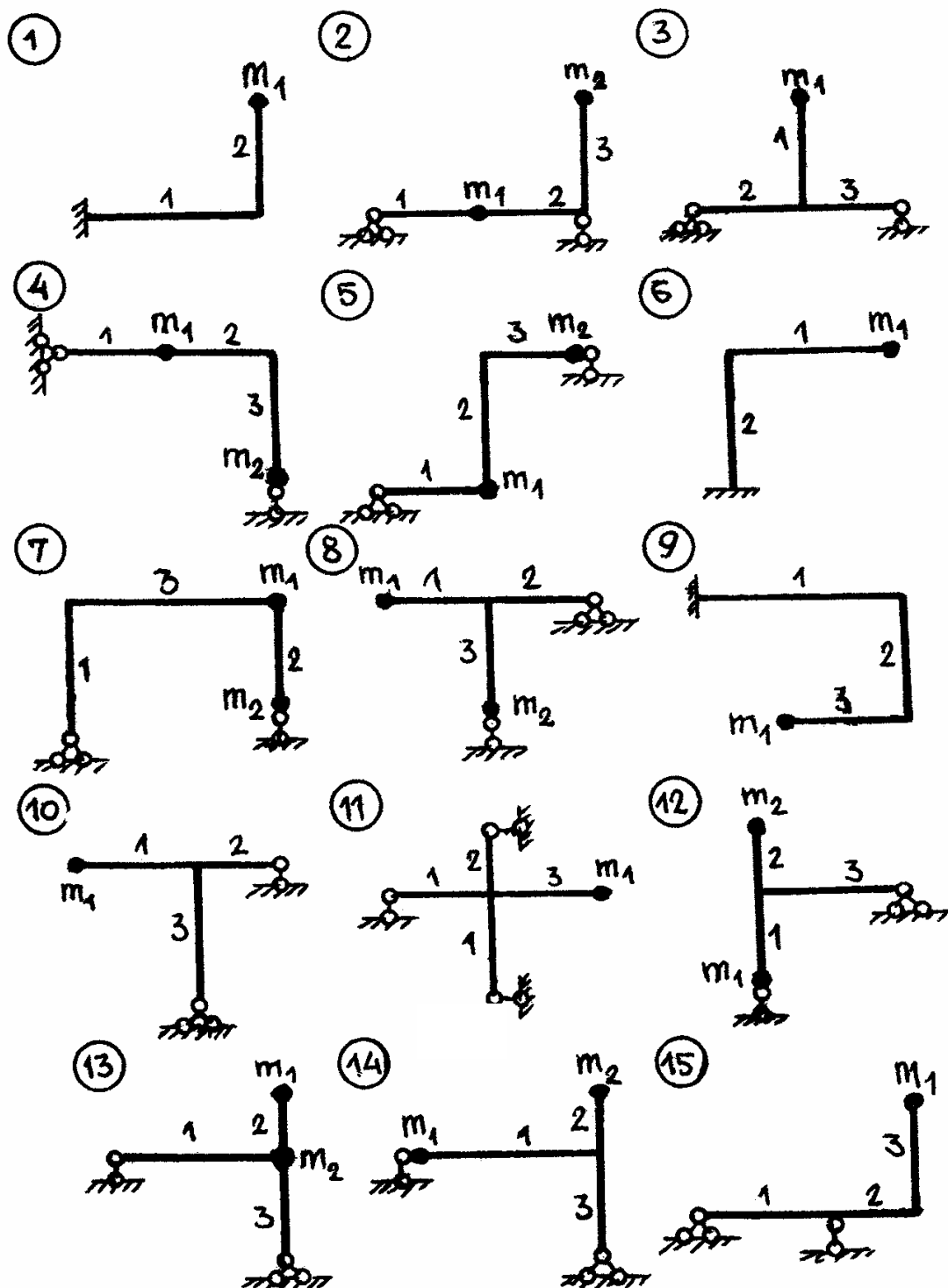
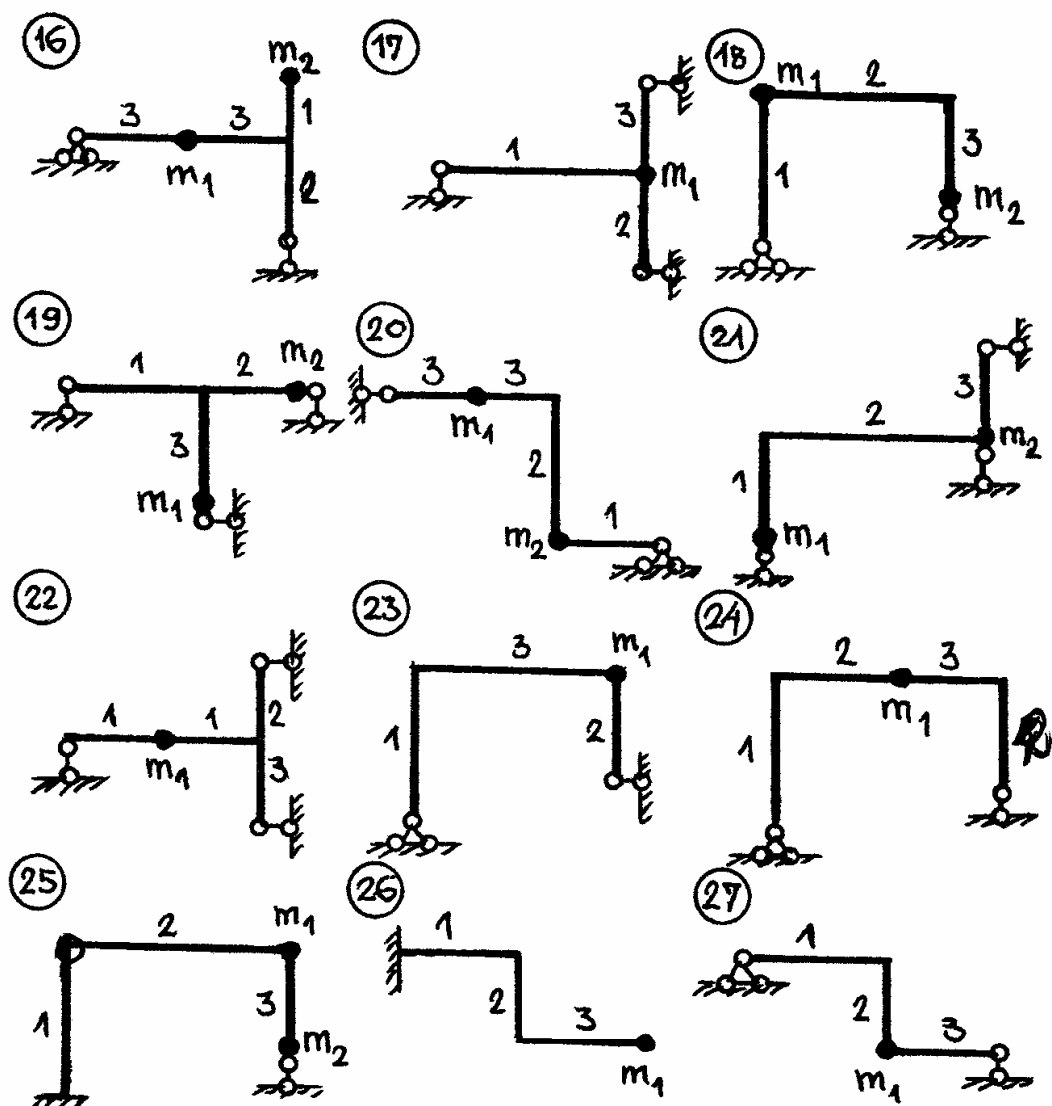


Рис. 50



Продолжение рис. 50

Таблица 7.

№ п/п	Длины стержней, м			№ двутавра сечения стержней			Массы, т		F , кН
	l_1	l_2	l_3	1	2	3	m_1	m_2	
1	2,0	1,1	1,5	30	40	30	1,0	2,0	20
2	1,8	1,0	2,0	30	30	40	1,1	1,9	40
3	1,6	0,9	1,6	33	45	30	1,2	1,8	60
4	1,9	1,0	1,8	36	40	30	1,3	2,0	80
5	1,7	1,1	1,9	36	30	40	1,4	1,9	100
6	2,1	1,2	2,0	40	40	45	1,5	1,8	90
7	1,8	1,1	1,9	40	36	36	1,6	2,0	70
8	1,9	0,8	1,5	50	45	30	1,7	1,5	50
9	2,0	1,2	2,1	45	36	40	1,8	1,4	30
10	1,6	1,0	1,7	45	33	36	1,9	1,3	10

Целью работы является динамический расчет рамы. Для заданной рамы необходимо:

- определить спектр частот свободных колебаний;
- найти формы свободных колебаний и проверить их ортогональность;
- построить эпюру динамических изгибающих моментов от действия возмущающей нагрузки $F(t) = F \sin \theta t$ при $\theta = 0,8\omega_1$ и вычислить динамический коэффициент.

2. Указания к выполнению работы

1. Для определения *числа степеней свободы* необходимо сравнить массу стержней рамы с заданными на ней точечными массами m_1, m_2 . Поскольку последние значительно больше, массой рамы можно пренебречь и далее учитывать только точечные массы. Рассматривая деформации рамы, устанавливают возможность перемещений масс. Продольными деформациями стержней при этом пренебрегают. Количество возможных перемещений точечных масс дает число степеней свободы динамической системы. Принятые положительные направления перемещений v масс на схеме показывают стрелками.
2. Поочередно прикладывая единичные силы $F_i = 1$ в направлении положительных перемещений масс, строят *эпюры изгибающих моментов* \overline{M}_i .
3. *Единичные перемещения* масс δ_{ik} находят методом Мора, перемножая по правилу Верещагина и по формуле Симпсона единичные эпюры изгибающих моментов:

$$\delta_{ik} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \overline{M}_i \overline{M}_k dx.$$

4. *Уравнение частот свободных колебаний* получают, раскрывая определитель (93) уравнений (92) свободных колебаний. В частности, для системы с двумя степенями свободы

$$\begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}) & m_2 \delta_{12} \\ m_1 \delta_{21} & (m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}) (m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}) - m_1 m_2 \delta_{12}^2 = 0. \quad (149)$$

Решение этого уравнения дает две частоты, которые нумеруют, начиная с меньшей. Такой набор частот

$$\omega_1 \leq \omega_2$$

и есть спектр частот рамы для $n = 2$.

5. Поскольку амплитуды свободных колебаний остаются неопределенными, *формы свободных колебаний* определяются соотношениями амплитуд (97). Эти соотношения находят из уравнений (92). В частности, для системы с двумя степенями свободы при первой частоте из первого уравнения (92) имеем:

$$\mu_{11} = 1; \quad \mu_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega_1^2}}{m_2 \delta_{12}}, \quad (150, a)$$

При второй частоте

$$\mu_{12} = 1; \quad \mu_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega_2^2}}{m_2 \delta_{12}}, \quad (150, б)$$

Здесь A_{ik} – амплитуда i -го перемещения массы, соответствующая k -й форме колебаний, т.е. колебаниям с частотой ω_k .

6. *Формы свободных колебаний должны удовлетворять условию ортогональности* (103). Эти условия для системы с двумя степенями свободы будут иметь такой вид

$$m_1 + m_2 \mu_{21} \mu_{22} = 0 \quad (151)$$

Погрешность выполнения условия (151) не должна превышать 3%.

7. Уравнения относительно амплитуд инерционных сил (128) для системы с двумя неизвестными имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* I_1 + \delta_{12} I_2 + A_{1f} = 0, \\ \delta_{21} I_1 + \delta_{22}^* I_2 + A_{2f} = 0. \end{cases} \quad (152)$$

Главные коэффициенты этих уравнений, отмеченные звездочками, вычисляют по формуле (129).

Свободные члены A_{if} уравнений (152) являются перемещениями масс от амплитудного значения возмущающей нагрузки $F(t) = F \sin \theta t$. Для их определения нужно построить эпюру изгибающих моментов M_f от действия силы F и перемножить ее по правилу Верещагина или по формуле Симпсона с единичными эпюрами \bar{M}_i .

Если возмущающая сила приложена в направлении одного из перемещений масс, то эпюру M_f и перемещения A_{if} можно вычислить умножением соответствующей единичной эпюры и соответствующих единичных перемещений на значение F .

8. *Решение уравнений* (152) дает значения амплитуд инерционных сил I_i . Его можно выполнить любым известным методом. Правильность решения необходимо проверить подстановкой.

9. Эпюру динамических моментов получают, суммируя эпюры моментов от амплитуд инерционных сил I_i и эпюры моментов M_f от амплитуды возмущающей нагрузки:

$$M_d = \overline{M}_1 \cdot I_1 + \overline{M}_2 \cdot I_2 + M_f. \quad (153)$$

Сравнивая значения моментов M_d и M_f , вычисляют динамический коэффициент:

$$\mu = \frac{M_d}{M_f}, \quad (154)$$

где M_d – наибольший изгибающий момент на эпюре M_d ,
 M_f – изгибающий момент в соответствующем сечении на эпюре M_f .

4. Примеры расчета

Пример 1. Определить частоты свободных колебаний рамы, приведенной на рис. 51,

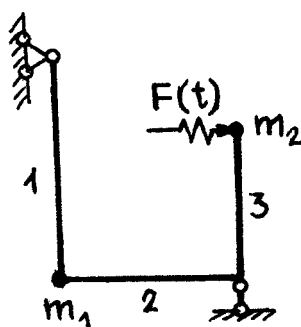


Рис. 51

и построить эпюры динамических моментов от действия силы $F(t) = F \sin \theta t$ при $\theta = 0,75\omega_1$ и других данных, представленных в табл. 8.

Таблица 8

Номер стержня	Длина стержня, м	Сечение стержня двутавр, №	Номер массы	Масса, т	F , кН
1	3	30	1	3	60
2	2,5	36			
3	2	40		2	

Решение:

1. Определяем число степеней свободы системы. По сортаменту находим массы двутавров:

№ 30 – 0,0365 т/м, № 36 – 0,0486 т/м, № 45 – 0,057 т/м.

Полная масса стержней рамы:

$$m = 0,0365 \cdot 3 + 0,0486 \cdot 2,5 + 0,057 \cdot 2 = 0,345 \text{ т},$$

что составляет незначительную часть от величины точечных масс $m_1 + m_2 = 3 + 2 = 5$ т. Следовательно, массой стержней можно пренебречь по сравнению с точечными массами. Тогда на основе характера деформаций рамы устанавливаем, что каждая масса может перемещаться независимо одна от другой в направлениях, обозначенных на рис. 52 соответственно v_1 и v_2 . Таких перемещений два, следовательно $n = 2$, т.е. система имеет две степени свободы.

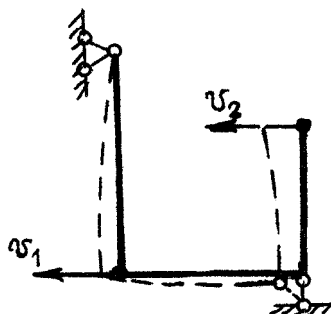


Рис. 52

2. Строим эпюры изгибающих моментов от единичных сил F_1 и F_2 , приложенных в направлениях v_1 и v_2 (рис. 53).

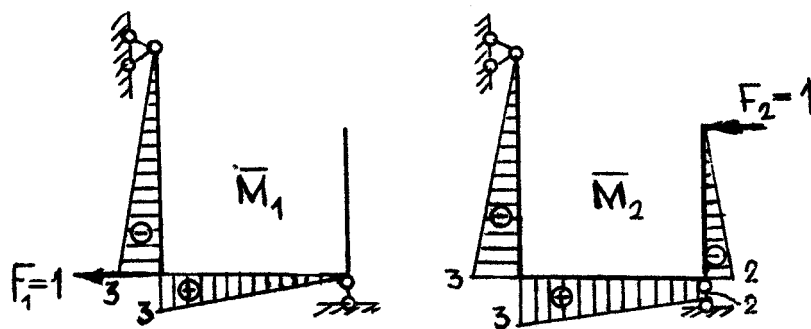


Рис. 53

3. Определяем единичные перемещения масс.

Предварительно находим изгибные жесткости стержней рамы ($E = 2 \times 10^8$ кПа):

$$EI_1 = 2 \times 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-8} = 14160 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$EI_2 = 2 \times 10^8 \cdot 13380 \cdot 10^{-8} = 26760 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$EI_3 = 2 \cdot 10^8 \cdot 19062 = 38124 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Далее перемножаем эпюры изгибающих моментов по правилу Верещагина и по формуле Симпсона:

$$\delta_{11} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \overline{M}_1 \overline{M}_1 dx = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI_2} \frac{3 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 =$$

$$\frac{9}{14160} + \frac{7,5}{26760} = 9,159 \cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \overline{M}_1 \overline{M}_1 dx = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI_2} \frac{3 \cdot 2,5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) =$$

$$\frac{9}{14160} + \frac{10}{26760} = 10,093 \cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{22} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \overline{M}_1 \overline{M}_1 dx = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{3 \times 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI_2} \frac{2,5}{6} \cdot (3^2 + 4 \cdot 2,5^2 + 2^2) +$$

$$+ \frac{1}{EI_3} \frac{2 \times 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{9}{14160} + \frac{15,833}{26760} + \frac{2,667}{38124} = 12,972 \cdot 10^{-4};$$

4. Составляем уравнение частот свободных колебаний рамы (149).

После преобразований получаем:

$$\left(\frac{1}{\omega^2} \right)^2 - (m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22}) \frac{1}{\omega^2} + m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Подставляя значения масс и единичных перемещений, решаем полученное квадратное уравнение относительно $\frac{1}{\omega^2}$:

$$\left(\frac{1}{\omega^2} \right)^2 - (3 \cdot 9,159 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 12,972 \cdot 10^{-4}) \frac{1}{\omega^2} +$$

$$+ 3 \cdot 2 \cdot (9,159 \cdot 10^{-4} \cdot 12,972 \cdot 10^{-4} - 10,093^2 \cdot 10^{-8}) = 0;$$

$$\left(\frac{1}{\omega^2} \right)^2 - 53,42 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\omega^2} + 101,7 \cdot 10^{-8} = 0;$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{53,42 \cdot 10^{-4}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{53,42 \cdot 10^{-4}}{2} \right)^2 - 101,7 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 26,71 \cdot 10^{-4} \pm 24,73 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} = (26,71 + 24,73) \cdot 10^{-4} = 51,44 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{1}{\omega_2^2} = (26,71 - 24,73) \cdot 10^{-4} = 1,98 \cdot 10^{-4}.$$

Теперь можно определить частоты свободных колебаний рамы:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{51,44 \cdot 10^{-4}}} = 13,9 \text{ 1/c};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{1,98 \cdot 10^{-4}}} = 71,1 \text{ 1/c}.$$

5. Находим *формы свободных колебаний рамы* в соответствии с (150,а), (150,б). Для первой формы свободных колебаний

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega_1^2}}{m_2 \delta_{12}} = \\ &= -\frac{3 \cdot 9,159 \cdot 10^{-4} - 51,44 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}} = 1,187. \end{aligned}$$

Это значение можно проконтролировать по второму уравнению (92):

$$\mu_{21} = -\frac{m_1 \delta_{21}}{m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_1^2}} = -\frac{3 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 12,972 \cdot 10^{-4} - 51,44 \cdot 10^{-4}} = 1,187.$$

То же для второй собственной формы колебаний:

$$\begin{aligned} \mu_{22} &= \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega_2^2}}{m_2 \delta_{12}} = \\ &= -\frac{3 \cdot 9,159 \cdot 10^{-4} - 1,98 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}} = -1,263. \end{aligned}$$

Контроль по второму уравнению:

$$\mu_{22} = -\frac{m_1 \delta_{21}}{m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_2^2}} = -\frac{3 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 12,972 \cdot 10^{-4} - 1,98 \cdot 10^{-4}} = -1,263.$$

Формы свободных колебаний отображены на рис. 54.

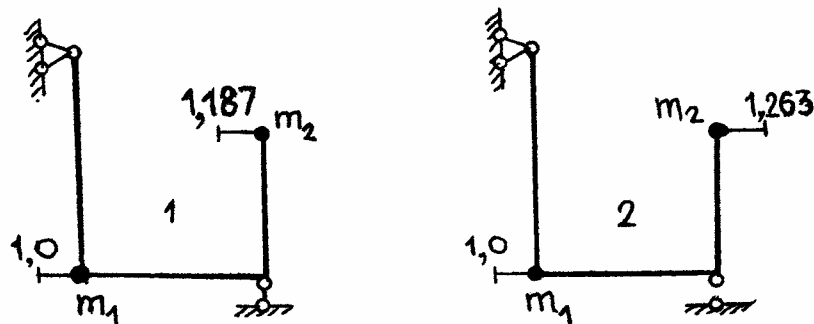


Рис. 54

6. Проверяем ортогональность форм свободных колебаний по (151):

$$m_1 + m_2 \mu_{21} \mu_{22} = 3 + 2 \cdot 1,187 \cdot (-1,263) = 3 - 3,003 = -0,003 \approx 0.$$

Погрешность составляет

$$\varepsilon = \frac{0,003}{3} \cdot 100\% = 0,1\% < 3\%.$$

7. Вычисляем коэффициенты и свободные члены системы уравнений (152). Частота возмущающей нагрузки в соответствии с заданием составляет

$$\theta = 0,75 \omega_1 = 0,75 \cdot 13,9 = 10,4 \text{ } 1/c.$$

Итак, в соответствии с (129) находим главные коэффициенты уравнений (152):

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = 9,159 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{3 \cdot 10,4^2} = -2,166 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = 12,972 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{3 \cdot 10,4^2} = -3,326 \cdot 10^{-3}.$$

Возмущающая сила $F(t)$ действует вдоль перемещения v_2 . Поэтому грузовую эпюру M_f (рис. 55) и грузовые перемещения Δ_{1f} , Δ_{2f} можно получить через единичную эпюру \overline{M}_2 и единичные перемещения δ_{12} и δ_{22} .

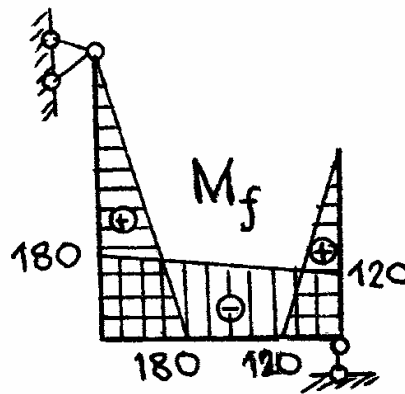


Рис. 55

Так,

$$M_f = -\overline{M}_2 \cdot F;$$

$$\Delta_{1f} = -\delta_{12} \cdot F = -10,093 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = -0,06056;$$

$$\Delta_{2f} = -\delta_{22} \cdot F = -12,972 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = -0,07784.$$

Знак минус в приведенных выше выражениях объясняется тем, что положительные направления силы $F(t)$ и перемещения v_2 не совпадают, хотя он введен формально, поскольку сила $F(t)$ со временем меняет свое направление.

8. Решаем систему уравнений (152) относительно амплитуд инерционных сил:

$$\begin{cases} -2,166 \cdot 10^{-3} \cdot I_1 + 10,093 \cdot 10^{-4} \cdot I_2 - 0,06056 = 0; \\ 10,093 \cdot 10^{-3} \cdot I_1 - 3,326 \cdot 10^{-4} \cdot I_2 - 0,07784 = 0; \end{cases}$$

$$I_2 = 0,3035 \cdot I_1 - 23,4;$$

$$-2,166 \cdot 10^{-3} \cdot I_1 + 10,093 \cdot 10^{-4} (0,3035 \cdot I_1 - 23,4) - 0,06056 = 0;$$

$$-1,860 \cdot 10^{-3} \cdot I_1 - 0,08418 = 0;$$

$$I_1 = -45,26 \text{ кН}; \quad I_2 = 0,3035 \cdot (-45,26) - 23,4 = -37,14 \text{ кН}.$$

9. Строим эпюру динамических моментов в соответствии с формулой (153). Эпюры моментов от действия амплитудных значений инерционных масс приведены на рис. 56, а эпюра M_∂ – на рис. 57.

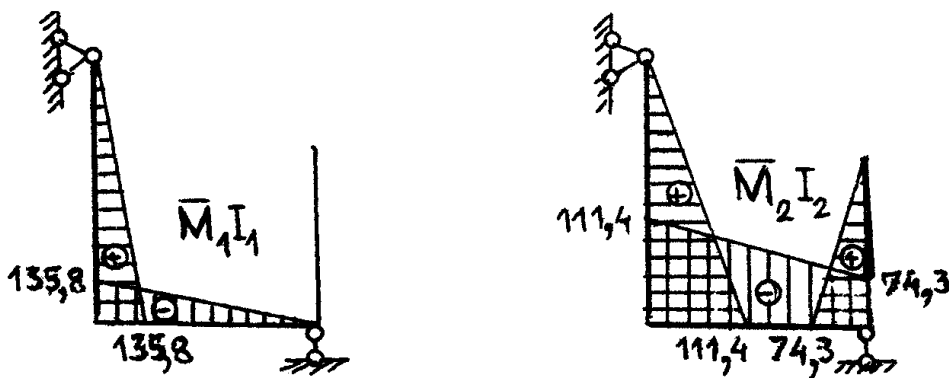


Рис. 56

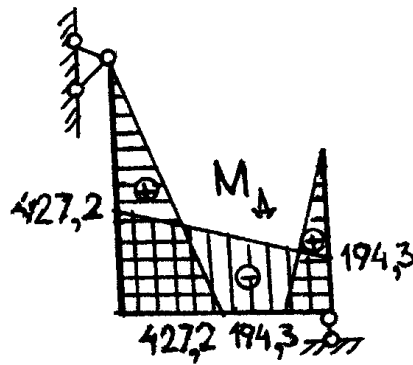


Рис. 57

Динамический коэффициент определяем по величине наибольшего значения момента M_d :

$$\mu = \frac{M_d}{M_f} = \frac{427,2}{180} = 2,37.$$

Пример 2. Определить число степеней свободы и составить уравнение частот свободных колебаний рамы, приведенной на рис. 58.

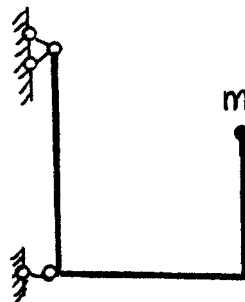


Рис. 58

Решение.

Возможные деформации рамы и направления v_1 , v_2 перемещений массы показаны на рис. 59.

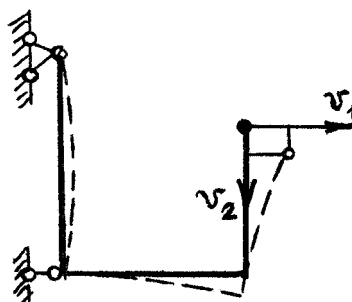


Рис. 59

Таким образом, рама имеет две степени свободы и, в соответствии с (149) уравнение частот свободных колебаний имеет вид

$$\left(m\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} \right) \left(m\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} \right) - m^2 \delta_{12}^2 = 0.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Строительная механика стержневых систем и оболочек /Под ред. Ю.И.Бутенко. – К.: Вища школа, 1980. – 488 с.
2. Строительная механика /Под ред. Ю.И.Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 479 с.
3. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям /Под ред. Ю.И.Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 376 с.
4. А.Ф.Смирнов, А.В.Александров и др. Строительная механика: Динамика и устойчивость. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.
5. Л.Н.Шутенко, В.П.Пустовойтов, Н.А.Засядько. Строительная механика: Краткий курс /Раздел 2. Статически неопределимые стержневые системы. – Харьков, ХГАГХ, 2003. – 85 с.
6. Л.М.Шутенко, В.П.Пустовойтов, М.А.Засядько. Механіка споруд. – Харків, ХДАМГ, 2001. – 234 с.
7. Методичні вказівки і завдання до виконання розрахунково-графічної роботи з будівельної механіки «Розрахунок рам на стійкість методом переміщень». Засядько М.А. – Харків, ХДАМГ, 2001. – 21 с.
8. Методичні вказівки і завдання до виконання розрахунково-графічної роботи з будівельної механіки «Розрахунок рам на динамічне навантаження». Засядько М.А. – Харків, ХДАМГ, 2003. – 18 с.

Учебное издание

Строительная механика: Краткий курс/ Разделы 3, 4. Устойчивость и динамика стержневых систем (для студентов строительных специальностей).

Авторы: Леонид Николаевич Шутенко,
Николай Андреевич Засядько

Редактор Н.З.Алябьев

Корректор З.И.Зайцева

План 2005, поз. 61

Подп. к печати 19.08.2005 г.	Печать на ризографе	Зак. № 2958
Формат 60х84 1/16	Усл.-печ.л. 7,8	Тираж 100 экз.
Бумага офисная	Уч.изд.л. 8,0	Цена договорная

61002, Харьков, ХНАГХ, ул. Революции, 12
Сектор оперативной полиграфии ВЦ ХНАГХ

61002, Харьков, ул. Революции, 12